Universidad Simón Bolívar

Matemáticas IV

Prof. Humberto F Valera Castro

Matemáticas IV

Prof. Humberto F. Valera Castro

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

Caracas 2016

INDICE GENERAL

CONTENIDOS

Capitulo 1

Capitulo 2

Capitulo 3

Capitulo 4

Capitulo 5

Capitulo 6

Parte I

Sucesiones y Series numéricas

Series de Potencias

Series de Taylor y Maclaurin

Capítulo 1

1. Sucesiones

Definición 1.1

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos y cuyo rango es un conjunto de números reales. Por tanto, si S es una sucesión, entonces a cada entero n le corresponde un número real $S(n)$*, es decir,* $S(1), S(2), \dots, S(n), \dots$

Con la notación de subíndice en lugar de funcional, podemos escribir

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

donde a_1 *es el primer término,* a_2 *es el segundo y* a_n *es el n-ésimo término.*

Podemos indicar una sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ *mediante* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, o simplemente* $\{a_n\}$*.*

♦

Se puede especificar una sucesión dando suficientes términos iniciales para establecer un patrón, como

1, 4, 7, 10, 13,…

mediante una ***fórmula explicita*** *para el n-ésimo término, como en*

$$a_n = 3n - 2, \quad n \geq 1$$

O mediante una ***fórmula recursiva***

$$a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + 3, \qquad n \geq 2$$

Observe que cada una de estas ilustraciones describe la misma sucesión.

■

Otras fórmulas explicitas y los primeros términos de la sucesiones que generan

1. $a_n = 1 - \frac{1}{n}, \ \ n \geq 1$: $\qquad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$
2. $b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \ \ n \geq 1$: $\qquad 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7} \dots$
3. $c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \ \ n \geq 1$: $\qquad 0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{6}{7} \dots$
4. $d_n = 0{,}9999, \ \ n \geq 1$: $\qquad 0{,}9999, 0{,}9999, 0{,}9999, 0{,}9999 \dots$

Observe que las sucesiones $\{ a_n \}$ *y* $\{ b_n \}$ *se apilan cerca de 1, es decir que convergen a 1, pero* $\{ c_n \}$ *y* $\{ d_n \}$ *no convergen a 1.*

Para que una sucesión converja a 1, primero debe ocurrir que los valores de la sucesión se acerquen a 1. Pero deben hacer más que estar cerca; deben permanecer cerca, para toda n más allá de cierto valor. Esto descarta la sucesión $\{ c_n \}$*. Aunque la sucesión* $\{ d_n \}$ *no converge a 1, es correcto decir que converge a* $0{,}9999$*. La sucesión* $\{ c_n \}$ *no converge; decimos que diverge.*

■

1.1 Límite de una sucesión

Una sucesión $\{a_n\}$ *se dice que* ***converge*** *a L y escribimos*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$*, existe un número* $N > 0$ *tal que* $n \geq N \Longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Si no existe número finito L, se dice que ésta ***diverge*** *o que es* ***divergente****.*

♦

Ejemplo 1.1.1

Demuestre que si p es un entero positivo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

▲ *Con base en el trabajo previo, esto es casi obvio, pero daremos una demostración formal.*

Sea $\varepsilon > 0$, *elijamos N como cualquier número mayor que* $\sqrt[p]{1/\varepsilon}$

Entonces

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n - L| = \left|\frac{1}{n^p} - 0\right| = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{N^p} \leq \frac{1}{\left(\sqrt[p]{1/\varepsilon}\right)^p} = \varepsilon$$

■

Si comparamos la definición de límite de una sucesión $\{a_n\}$ *con la definición de límite de una función* $f(x)$ *cuando x crece indefinidamente. Las dos definiciones son casi idénticas; sin embargo, cuando decimos que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, *la función está definida para todos los números reales mayores que algún número real R, mientras que cuando consideramos* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *el valor de n se limita a enteros positivos. Tenemos, sin embargo, el siguiente teorema*

Teorema 1.1

Sea f una función de una variable real tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Si $\{a_n\}$ *es una sucesión tal que* $f(n) = a_n$ *para todo entero positivo n, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

♦

Ejemplo 1.1.2

Determine si la sucesión

$$\left\{\frac{n^2}{2^n - 1}\right\}$$

Converge o diverge

▲ *Consideremos la función*

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x - 1}$$

aplicando la regla de L'Hopital dos veces tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{(ln2)2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{(ln2)^2 2^x} = 0$$

Como $f(n) = a_n$ *para todo entero positivo n el teorema anterior nos permite concluir que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n - 1} = 0$$

$es\ decir, \left\{\frac{n^2}{2^n - 1}\right\}\ converge\ a\ 0.$

■

Observación: *El inverso del teorema anterior no es cierto. Es decir, es posible que la sucesión* $\{a_n\}$ *converja a L aunque* $f(x)$ *no converja a L.*

Por ejemplo,

$$\lim_{n\to\infty} sen\pi n = 0, \qquad (n\ entero\ positivo)$$

Pero

$$\lim_{x\to\infty} sen\pi x, \quad (x\ un\ número\ real)$$

No existe

Teorema 1.2

Si $\{ a_n \}$ *y* $\{ b_n \}$ *son sucesiones convergentes y k una constante, entonces*

$i)\ \lim_{n\to\infty} k = k$

$ii)\ \lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$

$iii)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

$iv)\ \lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$

$v)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, *siempre que* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

♦

Ejemplo 1.1.3

Determinar si la sucesión

$$\left\{\frac{n^2}{2n+1} sen \frac{\pi}{n}\right\}$$

es convergente.

▲

$$\frac{n^2}{2n+1} sen \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2n+1} nsen \frac{\pi}{n}$$

Ahora bien, la sucesión

$$\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$$

Es convergente, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Veamos si la sucesión

$$\left\{nsen\frac{\pi}{n}\right\}$$

es convergente, para ello calculemos

$$\lim_{x\to\infty} xsen\frac{\pi}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} xsen\frac{\pi}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{sen\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}} = \pi \lim_{x\to\infty}\frac{sen\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = \pi, \quad ya\ que\ \lim_{u\to 0}\frac{senu}{u} = 1$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}nsen\frac{\pi}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\right)\left(\lim_{n\to\infty} nsen\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

luego la sucesión converge

■

Teorema 1.3 (Teorema del emparedado)

Suponga que $\{a_n\}$ *y* $\{c_n\}$ *convergen a* L *y que* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *para* $n \geq K$ *(K es un entero fijo). Entonces* $\{b_n\}$ *también converge a L.*

Ejemplo 1.1.4

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{sen^3 n}{n} = 0$$

▲ *Para* $n \geq 1$,

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{sen^3 n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \ \ y \ \ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sen^3 n}{n} = 0$$

■

Teorema 1.4

Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0,$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Demostración

Como $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$, *y usando el teorema del emparedado, se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

♦

Ejemplo 1.1.5

Demuestre que si $-1 < r < 1$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0.$$

▲ *Si* $r = 0$, *el resultado es trivial, de modo que suponemos lo contrario.*

Entonces

$$\frac{1}{|r|} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{|r|} = 1 + p$$

Para algún número $p > 0$.

Ahora bien, por la fórmula del binomio,

$$\frac{1}{|r|^n} = (1+p)^n = 1 + pn + (términos\ positivos) \ge pn$$

Así,

$$0 \le |r|^n \le \frac{1}{pn}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{pn}\right)=\frac{1}{p}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

El teorema del emparedado implica que

$$\lim_{n\to\infty}|r|^n=0$$

O, en forma equivalente,

$$\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} r^n=0$$

■

1.2 Sucesiones monótonas y acotadas

Hasta ahora hemos determinado la convergencia de una sucesión hallando su límite. Veremos un método para decidir la convergencia o divergencia sin necesidad de conocer el límite.

Definición 1.2

Una sucesión $\{a_n\}$ *se dice que es*

a) ***Creciente*** *si* $a_n \le a_{n+1},\ n \ge 1$

b) ***Decreciente*** *si* $a_n \ge a_{n+1},\ n \ge 1$

Si una sucesión es creciente o decreciente, se llama ***monótona***

♦

Ejemplo 1.2.1

Determinar si la sucesión

$$b_n=\frac{2n}{1+n}$$

es monótona

▲ *Comparemos* b_n *con* b_{n+1}

$$b_n = \frac{2n}{1+n} < \frac{2(n+1)}{1+(n+1)} = b_{n+1}$$

Como $n > 0$ *podemos multiplicar ambos lados de la desigualdad por* $(1+n)$ *y* $(2+n)$ *sin invertir el signo de la desigualdad*

$$2n(2+n) < (1+n)(2n+2) \Longrightarrow 4n + n^2 < 2 + 4n + 2n^2 \Longrightarrow 0 < 2$$

Como la desigualdad final es válida, podemos invertir los pasos para concluir que la desigualdad original es también válida.

■

Definición 1.3

Una sucesión $\{a_n\}$ *es* ***acotada*** *si existe un número real* ***M*** *tal que* $|a_n| \leq M$ *para todo n. Llamamos a M una* ***cota superior*** *de la sucesión.*

♦

Ejemplo 1.2.2

Las sucesiones $\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$ *y* $\{b_n\} = \left\{\frac{2n}{1+n}\right\}$ *son acotadas, puesto que*

$$|3 + (-1)^n| \leq 4 \;\; y \;\; \left|\frac{2n}{1+n}\right| \leq 2$$

■

Teorema 1.5

Una sucesión monótona y acotada es convergente

♦

El teorema asegura que las sucesiones divergentes o son no acotada o no monótonas.

Ejemplo 1.2.3

Demuestre que la sucesión

$$b_n = \frac{n^2}{2^n}$$

Converge usando el teorema 1.5

▲ *Los primeros términos de esta sucesión son*

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{9}{16}, \frac{49}{128}, \dots$$

Para $n \geq 3$*, la sucesión parece ser decreciente* $(a_n \geq a_{n+1})$*, un hecho que estableceremos a continuación.*

$$\frac{n^2}{2^n} > \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \Leftrightarrow n^2 > \frac{(n+1)^2}{2} \Leftrightarrow 2n^2 > n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n > 1 \Leftrightarrow n(n-2) > 1$$

Es claro que esta última desigualdad es cierta para $n \geq 3$*.*

Como la sucesión es decreciente y está acotada por abajo por cero, el teorema de la sucesión monótona y acotada garantiza la convergencia.

Es fácil usar la regla de L´Hopital para mostrar que el límite es cero

■

Ejemplo 1.2.4

La sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \dots, \frac{n^2}{n+1}, \dots$$

es monótona, pero no acotada, pues

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$$

Por su parte, la sucesión divergente

$$2, 4, 2, 4, \dots, \{3 + (-1)^n\}, ..$$

es acotada, pero no monótona

Capítulo 2

2. Series infinitas

Definición 2.1

Si $\{a_n\}$ *es una sucesión, y*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Entonces la sucesión $\{S_n\}$ *se llama* ***serie infinita*** *(o simplemente serie). Esta serie infinita se representa por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Los números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *se denominan* ***términos*** *de la serie. Los números* $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ *se llaman sumas parciales de la serie.*

♦

Observación*: Para algunas series conviene empezar el índice en* $n = 0$*. Representaremos una serie por* $\sum a_n$*. Así que el punto inicial del índice (*$n = 0$ *o* $n = 1$*) se deducirá del contexto.*

Definición 2.2.

Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ *converge a S, diremos que la serie* $\sum a_n$ ***converge****. Llamaremos a S* ***suma de la serie*** *y escribimos*

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Si $\{S_n\}$ *diverge, diremos que la serie es* ***divergente.***

♦

Observación: *Una serie no es más que una sucesión de sumas parciales, de manera que las siguientes propiedades son consecuencia directa de sus análogos en sucesiones.*

2.2 Serie geométrica

Una serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

*donde $a \neq 0$, es una **serie geométrica** de razón r.*

♦

Ejemplo 2.2.1

Demuestre que una serie geométrica converge y tiene suma

$$S = \frac{a}{1-r}, \qquad si\ |r| < 1,$$

Pero diverge si $|r| \geq 1$.

▲ *Sea $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$. Si $r = 1$, $S_n = na$, lo cual crece sin límite, de modo que $\{S_n\}$ diverge.*

Si $r \neq 1$, podemos escribir

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (S_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$

$$= a - ar^n$$

Entonces

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

Si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ y así

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

Si $|r| > 1$ *o* $r = -1$, *la sucesión* $\{r^n\}$ *diverge y y en consecuencia, también lo hace la sucesión* $\{S_n\}$.

■

Ejemplo 2.2.2

Calcule la suma de las siguientes series geométricas

$a.$ $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \cdots$

$b.$ $0{,}515151\ldots = \frac{51}{100} + \frac{51}{10.000} + \frac{51}{1.000.000} + \cdots$

▲

$a.$ $S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$

$b.$ $S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{51}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{51}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$

El procedimiento de la parte (b) sugiere como mostrar que cualquier decimal periódico representa un número racional.

■

Ejemplo 2.2.3

Determine si las siguientes series geométricas convergen o divergen

$a.$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$

$b.\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$

▲

$$a.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad donde\ la\ razón\ r=\frac{1}{2}\ \ y\ a=3$$

Como $|r|<1$, *la serie converge y*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n}=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=6$$

$$b.\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\ es\ divergente, ya\ que\ la\ razón\ r=\frac{3}{2}>1$$

■

Ejemplo 2.2.4

Se suelta una bola desde una altura de 6 metros y empieza a rebotar alcanzando en cada rebote $\frac{3}{4}$ *de la altura del rebote anterior. Hallar la distancia total que recorrerá esa bola.*

▲ *Al tocar suelo la primera vez la bola ha recorrido una distancia* $D_1=6$. *En los rebotes siguientes sea* D_n *la distancia recorrida subiendo y bajando, es decir,*

$$D_2=6\left(\frac{3}{4}\right)+6\left(\frac{3}{4}\right)=12\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$D_3=6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=12\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$D_4=6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=12\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

Continuando ese proceso, tenemos que la distancia vertical total recorrida es

$$D=6+12\left(\frac{3}{4}\right)+12\left(\frac{3}{4}\right)^2+12\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots$$

Ahora bien,

$$6 = -6 + 12 = -6 + 12\left(\frac{3}{4}\right)^0,$$

entonces

$$D = -6 + 12\left(\frac{3}{4}\right)^0 + 12\left(\frac{3}{4}\right) + 12\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots = -6 + \sum_{n=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$= -6 + \frac{12}{1 - \frac{3}{4}} = -6 + 48 = 42, \qquad ya\ que\ r = \frac{3}{4} < 1 \quad y \quad a = 12$$

■

En muchos casos no es posible obtener una expresión para S_n en términos de n y, por lo tanto debemos conocer otros métodos para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

Teorema 2.1 (criterio del término n-ésimo para divergencia)

$$Si\ \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0\ \ o\ \ \lim_{n\to\infty} a_n\ no\ existe, entonces\ la\ serie\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ es\ divergente$$

En forma equivalente:

$$Si\ la\ serie\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ es\ convergente, entonces\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Demostración:

Sea S_n la n-ésima suma parcial y

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Observe que $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Como $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = S$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

♦

Ejemplo 2.2.5

Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3n^3 + 2n^2}$$

diverge.

▲

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3n^3 + 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{3}$$

Así, por el criterio del n-ésimo término, la serie diverge.

■

El reciproco del criterio del término n-ésimo es falso. Es decir, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *la serie no necesariamente es convergente. En otras palabras, es posible tener una serie divergente para la cual* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Un ejemplo importante de serie divergente es la* ***serie armónica***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Sin duda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Sin embargo, la serie diverge, como demostraremos a continuación.

Ejemplo 2.2.6

Demuestre que la serie armónica diverge.

▲ *Mostraremos que* S_n, *crece si cota.*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \cdots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Es claro que al hacer n suficientemente grande, podemos introducir en la última expresión tantos $\frac{1}{2}$ *como queramos. Así,* S_n *crece sin límite, de modo que* $\{S_n\}$ *diverge. Por lo tanto, la serie armónica diverge.*

■

Ejemplo 2.2.7

Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

hallar los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$*, determinar una fórmula para* S_n *en términos de n y diga si la serie converge o diverge.*

▲ *Como* $S_n = S_{n-1} + a_n$

Así tenemos que los primeros cuatro términos de la sucesión de sumas parciales son:

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = S_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = S_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}$$

Ahora bien,

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1},$$

usando fracciones simples, de donde $A = 1,\ B = -1$

Luego

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Así

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\ a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots, a_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Ahora bien, S_n *puede escribirse en* ***forma telescópica****, en la que cada término tras el primero se cancela con su sucesor.*

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{n}{n+1}$$

Luego la sucesión de sumas parciales para la serie dada es

$$\{S_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\},$$

Además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

Entonces la serie converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

■

Teorema 2.2 (Linealidad de las series convergentes)

$$Si \sum_{k=1}^{\infty} a_k \; y \sum_{k=1}^{\infty} b_k \; convergen \; y \; c \; es \; una \; constante, entonces \sum_{k=1}^{\infty} ca_k \;\; y \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$$

también convergen y

$$i) \sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$ii) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Demostración:

Por hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \;\; y \;\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Existen.

Así,

$$i) \sum_{k=1}^{\infty} ca_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ca_k = \lim_{n\to\infty} c \sum_{k=1}^{n} a_k = c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$ii) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

♦

Corolario 2.2

1. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente y la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *es divergente entonces la serie*

   $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *es divergente*

2. *Si ambas series* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *son divergente la serie*

   $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *puede ser o no convergente*

♦

Ejemplo 2.2.8

1. *Si* $a_n = \dfrac{1}{n}$ *y* $b_n = \dfrac{1}{n}$, *entonces* $a_n + b_n = \dfrac{2}{n}$ *y* $\sum (a_n + b_n) = \sum \dfrac{2}{n} = 2\sum \dfrac{1}{n}$

   que es divergente.

1. *Si* $a_n = \dfrac{1}{n}$ *y* $b_n = -\dfrac{1}{n}$, *entonces* $a_n + b_n =$ *y* $\sum (a_n + b_n) = \sum 0$

   que es convergente.

■

2.3 Criterios de convergencia para series de términos positivos

En ésta sección restringiremos nuestra atención a las series con términos positivos (o al menos no negativos)

2.3.1 Criterio de la integral

Si f es una función positiva, continua, decreciente para todo $x \geq 1$ *y suponga que* $a_n = f(n)$ *para todo entero positivo n. Entonces, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge si sólo si la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

converge

♦

Ejemplo 2.3.1.1 (Criterio de la serie p)

Demuestre que la serie-p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Converge si $p > 1$ *y diverge si* $0 < p < 1$

▲

$$Si\ \ p \geq 0, la\ función\ \ f(x) = \frac{1}{x^p}\ es\ continua, positiva\ y\ decreciente\ en\ [1, \infty)$$

Consideremos la integral impropia

$$Si\ p \neq 1, \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b^{1-p} - 1}{1-p}\right]$$

$$= \begin{cases} \infty & si \quad p < 1 \\ \dfrac{-1}{1-p} & si \quad p > 1 \end{cases}$$

$$Si\ p = 1, \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} [lnx]_1^b = \lim_{b\to\infty} [lnb] = \infty$$

Luego la serie-p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Converge si $p > 1$ *y diverge si* $0 < p \leq 1$

■

Ejemplo 2.3.1 .2

Determine si

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n ln\, n}$$

Converge o diverge

▲

$Si\ p \geq 2, la\ función\ f(x) = \frac{1}{xlnx}\ es\ continua, positiva\ y\ decreciente\ en\ [2,\infty)$.

Ahora bien,

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{xlnx} dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{xlnx} dx = \lim_{b\to\infty} [ln(lnx)]_2^b = \infty$$

Así,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n ln\, n}$$

diverge

■

Cómo aproximar la suma de una serie

Hasta ahora hemos estado interesados en si una serie converge o diverge. Salvo por unos casos especiales, tal como la serie geométrica o una serie telescópica, no hemos abordado la pregunta de a que si converge una serie a qué converge. En general, ésta es una pregunta difícil, pero en este momento podemos utilizar el método sugerido por el criterio de la integral para ***aproximar*** *la suma de una serie.*

Si utilizamos la n-ésima suma parcial S_n *para aproximar a la suma de la serie*

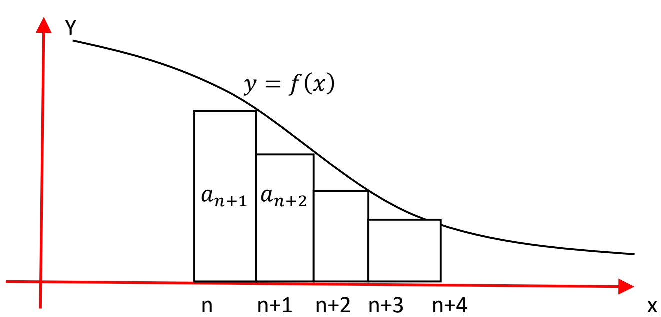
$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Entonces el error que cometemos es

$$E_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

Sea $f(x)$ *una función con las propiedades de que* $a_n = f(n)$ *y* f *sea positiva, continua y decreciente en* $[1, \infty)$; *condiciones del teorema de la integral. Con base en estas condiciones*

$$E_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots < \int_n^\infty f(x)dx$$



Podemos utilizar este resultado para determinar una cota superior del error implicado al utilizar los primeros n términos para aproximar la suma S de la serie, y podemos utilizarla para determinar qué tan grande debe ser n para aproximar a S con una precisión deseada.

♦

Ejemplo 2.3.1.3

Determine una cota superior para el error al utilizar la suma de los primeros 20 términos para aproximar la suma de la serie convergente

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

▲ $Sea\ f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}\ una\ función\ que\ es\ positiva, continua\ y\ decreciente\ en\ [1, \infty)$

El error satisface

$$E_{20} = \sum_{k=20+1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} < \int_{20}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx = \lim_{b\to\infty} \left[-2x^{-1/2}\right]_{20}^{b} = \frac{2}{\sqrt{20}} \approx 0{,}44721$$

Incluso con 29 términos el error es un tanto grande

■

Ejemplo 2.3.1.4

¿Qué tan grande debe ser n, de modo que la suma parcial S_n se aproxime a la suma de la serie del ejemplo anterior con error no mayor que 0,005?

▲ *El error satisface*

$$E_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} < \int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx = \lim_{b\to\infty} \left[-2x^{-1/2}\right]_{n}^{b} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Así, para garantizar que el error sea menor que 0,005, necesitamos tener

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}005 \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{2}{0{,}005} \Rightarrow n > \left(\frac{2}{0{,}005}\right)^2 = 400^2 = 160.000$$

■

2.3.2 Criterio de comparación directa

Sean $0 \leq a_n \leq b_n$ *para toda* $n \geq N$

$$I.\ Si \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ converge, entonces \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ converge$$

$$II.\ Si \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ diverge, entonces \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ diverge$$

♦

Ejemplo 2.3.2.1

Determine la convergencia o divergencia de las siguientes series

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}}$

▲

1. *La serie dada tiene cierto parecido a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

serie geométrica convergente

Comparando término a término, resulta que

$$a_n = \frac{1}{2+3^n} < \frac{1}{3^n} = b_n, \quad n \geq 1$$

Luego por el criterio de comparación directa la serie es convergente.

2. *Esta serie es muy parecida a la serie-p divergente* $(p < 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Comparando término a término vemos

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1$$

que no cumple los requisitos de divergencia. (Recordemos que si una serie es término a término menor que una divergente, el criterio de comparación directa no concluye nada). Pese a todo, esperando que la serie sea divergente, la comparamos con la serie armónica divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Se demuestra que $2+\sqrt{n} \leq n \; si \; n \geq 4$

Luego, tenemos que

$$a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1+\sqrt{n}} = b_n, \quad n \geq 4$$

y por el criterio de comparación directa, la serie diverge.

■

2.3.3 Criterio de comparación en el límite

$Sea \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; y \; \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *series de términos positivos, y* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$ *Entonces*

1. *Si* $L > 0$, *entonces ambas series convergen o divergen*
2. *Si* $L = 0 \; y \; \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*
3. *Si* $L = \infty \; y \; \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge*

♦

Ejemplo 2.3.3.1

Determine si las series dada convergen o divergen

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n+5}{4n^3+3n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+\ln n}$

▲

1. Sea

$$a_n = \frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}$$

para construir b_n tomemos los términos de potencia máxima tanto en el numerador, como en el denominador de a_n es decir,

$$b_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Comparemos la serie dada con la serie-p convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Puesto que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4\sqrt{n}-1}{n^2+2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-n^{3/2}}{n^2+2\sqrt{n}} = 4 > 0$$

Entonces la serie dada converge

2. *Comparemos la serie dada con*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2},$$

$serie\ divergente, ya\ que\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}\neq 0\ \ (criterio\ del\ término\ n-ésimo)$

Ahora bien,

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n2^n+5}{4n^3+3n}}{\dfrac{2^n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 2^n+5n^2}{4n^3 2^n+3n2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{5}{n2^n}}{4+\dfrac{3}{n^2}}=\frac{1}{4}$$

Por lo tanto la serie es divergente, ya que $L>0$

3. *Comparando con la serie armónica divergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Tenemos que

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2n+\ln n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+\ln n}=\frac{1}{2}$$

Luego la serie diverge, ya que $L>0$

■

2.3.4 Criterio del cociente

Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y supongamos que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

I. *Si* $L < 1$, *la serie es convergente.*

II. *Si* $L > 1$, *la serie diverge.*

III. *Si* $L = 1$, *no se puede concluir nada*

♦

Ejemplo 2.3.4.1

Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

es convergente.

▲ *Usando el criterio del cociente, tenemos que*

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)} = 0 < 1$$

Por lo tanto la serie converge

■

Ejemplo 2.3.4.2

Determine la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{20}}$$

▲

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{20}}}{\frac{2^n}{n^{20}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}n^{20}}{2^n(n+1)^{20}} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{20} = 2 > 1$$

Concluimos que la serie dada diverge.

■

Ejemplo 2.3.4.3

Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Convergen o diverge.

▲

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Ahora bien,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Por lo tanto, la serie dada converge.

■

Resumen

Para verificar la convergencia o divergencia de una serie $\sum a_n$ *con términos positivos, observe con cuidado* a_n.

1. *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *concluya del criterio del término n-ésimo que la serie diverge.*
2. *Si* a_n *incluye* $n!, r^n$ *o* n^n, *trate de usar el criterio del cociente.*
3. *Si* a_n *incluye sólo potencias constantes de n, trate de usar el criterio de comparación del límite. En particular, si* a_n *es una expresión racional en n, use este criterio con* b_n *como el cociente de los términos principales del numerador y el denominador.*
4. *Si los criterios anteriores no funcionan, trate con el criterio de comparación directa, el criterio de la integral.*
5. *Algunas series exigen un manejo inteligente o un truco para determinar su convergencia o divergencia.*

♦

2.4 Series alternas

Tras estudiar las series de términos positivos, consideramos en ésta sección las series que contienen términos positivos y negativos. Las más sencillas son las ***series alternas****, cuyos términos alternan en signo.*

Definición 2.4.1

Si $a_n > 0$ *para todo entero positivo n, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots$$

$$y$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots + (-1)^{n}a_n + \cdots$$

Se llana ***series alternas o alternadas.***

♦

2.4.1 Criterio de series alternas

Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

Una serie alterna con $a_n > a_{n+1}$ *para todo n (*a_n *decreciente).*

$Si\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0, entoces\ la\ serie\ alterna\ converge.$

♦

Ejemplo 2.4.1

Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

es convergente

▲ *Veamos si* a_n *es decreciente*

$$a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1},$$

para todo entero positivo, además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Entonces la serie alterna converge.

■

Ejemplo 2.4.2

Determinar si son o no convergente las series

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln 2n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3n+2}{4n^2-3}\right)$

▲

1. *Calculemos*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty, (usando\ L\acute{}Hopital)$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Por lo tanto no podemos aplicar el criterio de series alternas, pero por el criterio del término n-ésimo la serie diverge.

2. *Tenemos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n^2-3} = 0$$

Veamos si a_n *es decreciente*

Sea

$$f(x) = \frac{3x+2}{4x^2-3}$$

Entonces

$$f'(x) = \frac{-12x^2-16x+9}{(4x^2-3)^2} < 0, \qquad ya\ que -12x^2-16x-9 < 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

luego f es decreciente para todo x real. En consecuencia

$$a_n = \frac{3n+2}{4n^2-3}$$

es decreciente.

Por lo tanto la serie dada es convergente.

■

2.5 Convergencia absoluta y condicional

Una serie puede tener términos positivos y negativos sin ser alterna, como ocurre con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\ n}{n^2} = \frac{sen\ 1}{1} + \frac{sen\ 2}{4} + \frac{sen\ 3}{9} + \cdots$$

Un modo de obtener información sobre su convergencia es investigar la de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{sen\ n}{n^2}\right|$$

Por comparación directa, tenemos $|sen\ n| \leq 1$ *para todo n, así que*

$$\left|\frac{sen\ n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \qquad n \geq 1$$

Luego, por el criterio de comparación directa, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{sen\ n}{n^2}\right|$$

converge. Pero la cuestión es: ¿converge la serie original o no?

■

Definición 2.5.1

Se dice que la serie

$$\text{Se dice que la serie} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \boldsymbol{converge\ absolutamente} \text{ si la serie } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge.}$$

♦

Una serie que es convergente, pero no absolutamente, se dice que es ***condicionalmente convergente.***

♦

Teorema 2.5.1

$$\text{Si la serie} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge, entonces la serie} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ tambien converge}$$

♦

Es decir ***Convergencia absoluta implica convergencia.***

El inverso del teorema 2.8.1 no es cierto. Por ejemplo, ***la serie armónica alterna***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge, por el criterio de series alternas. Sin embargo, la serie armónica diverge.

■

Ejemplo 2.5.1

Determinar si son convergentes las siguientes series y en caso afirmativo si lo hacen absolutamente o condicionalmente.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ln(n+1)}$

▲

1. *Observe que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} - \cdots$$

luego no es alterna. Sin embargo, nótese que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

es una serie geométrica convergente, ya que la razón $r = \frac{1}{3} < 1$*. En consecuencia, la serie dada converge absolutamente, entonces por el teorema 2.8.1 es convergente.*

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ln(n+1)} = -\frac{1}{ln\,2} + \frac{1}{ln\,3} - \frac{1}{ln\,4} + \cdots$ *serie alterna.*

Por el criterio de series alternas converge, ya que a_n *es decreciente, además*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Sin embargo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{ln(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln(n+1)}$$

Es divergente, puesto que comparándola con la serie armónica tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{ln(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{ln(n+1)} = \infty$$

Por lo tanto, la serie dada converge condicionalmente.

■

2.5.2 Criterio del cociente absoluto

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos no nulos y supongamos que* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

I. *Si* $L < 1$, *la serie es absolutamente convergente.*

II. *Si* $L > 1$, *la serie diverge.*

III. *Si* $L = 1$, *no se puede concluir nada*

♦

Ejemplo 2.5.2.1

Determine la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$$

▲

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$$

No se sabe nada. Usemos el criterio de series alternas.

Para probar que a_n *es decreciente, tomemos*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

Entonces

$$f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2} < 0, \qquad para\ x > 1.$$

Luego f es decreciente, además

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \ \ (usando\ L'Hopital)$$

Por lo tanto, la serie es convergente.

■

2.5.3 Criterio de la raíz

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos no nulos y supongamos que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

I. *Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.*
II. *Si $L > 1$, la serie diverge.*
III. *Si $L = 1$, no se puede concluir nada*

♦

Ejemplo 2.5.3.1

Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$$

converge o diverge.

▲ *Ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^{2n}}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n/3}}{n^{n/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{n} = 0 < 1$$

el criterio de la raíz asegura su convergencia.

■

Ejemplo 2.5.3.2

Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

converge o diverge

▲ *En primer lugar, tenemos*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{3^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/n}}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} n^{3/n}$$

Este límite es indeterminado de la forma ∞^0*, aplicamos la regla de L´Hopital:*

$$y = \lim_{x\to\infty} x^{3/x} \Longrightarrow \ln y = \ln\left(\lim_{x\to\infty} x^{3/x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\ln x^{3/x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$$

Entonces,

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/x} = 1$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} n^{3/n} = \frac{1}{3} < 1$$

Y el criterio asegura la convergencia de la serie.

Criterio	***Serie***	***Converge***	***Diverge***
n-ésimo	$\sum_{n*1}^{\infty} a_n$		$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$
Series geométricas	$\sum_{n*1}^{\infty} a_n\, r^{n-1}$	$Si\ \lvert r\rvert < 1,\ S = \frac{a}{1-r}$	$Si\ \lvert r\rvert \leq 1$
Series telescópicas	$\sum_{n*1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	
Series-p	$\sum_{n*1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	$p > 1$	$0 < p \leq 1$
Series alternas	$\sum_{n*1}^{\infty} (-1)^n a_n$	$0 < a_{n+1} \leq a_n\ \ y$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	
De la integral *f continua, positiva* *y decreciente*	$\sum_{n*1}^{\infty} a_n$	$\int_1^{\infty} f(x)dx$ *converge*	$\int_1^{\infty} f(x)dx$ *diverge*
Comparación directa	$\sum_{n*1}^{\infty} a_n$	$0 \leq a_n \leq b_n\ y\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge*	$0 \leq b_n \leq a_n\ y\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge*
Comparación en el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$	$\sum_{n*1}^{\infty} a_n$	$L \geq 0\ \ y \sum_{n*1}^{\infty} b_n$ *converge*	$L \geq 0\ \ y \sum_{n*1}^{\infty} b_n$ *diverge*
Cociente $\lim_{n\to\infty} \left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert = L$	$\sum_{n*1}^{\infty} a_n$	$L < 1$	$L > 1$
Raíz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = L$	$\sum_{n*1}^{\infty} a_n$	$L < 1$	$L > 1$

2.6 Series de potencias

*Una **serie de potencias** en $(x-c)$ es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

Cuando $c=0$ la serie se convierte en una serie de potencias en x, la cual es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Observe que $(x-c)^0 = 1$, aun cuando $x=c$, por conveniencia.

Como una serie de potencias tiene términos variables, puede verse como una función de x,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

*Cuyo **dominio** es el conjunto de x para el cual la serie converge.*

♦

Los tres ejemplos que siguen, muestran cómo usar el criterio del cociente para determinar los valores de x para los cuales la serie de potencias converge.

Ejemplo 2.6.1

Determine los valores de x para los cuales la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$$

es convergente.

▲ *Usando el criterio del cociente tenemos:*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}}{\dfrac{x^n}{(n+1)2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\right|\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{|x|}{2}$$

Por lo tanto, la serie de potencias es absolutamente convergente cuando $\frac{|x|}{2} < 1$*, es decir, cuando* $|x| < 2$ *y diverge cuando* $|x| > 2$.

Cuando $x = 2$ *o* $x = -2$*, falla el criterio.*

Sin embargo, cuando $x = 2$*, la serie de potencias dada se convierte en la serie armónica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} ,$$

que es divergente; y cuando $x = -2$*, es la serie alterna armónica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} ,$$

que es convergente.

Concluimos que la serie de potencias dada es:

Convergente si $-2 \leq x < 2$*, absolutamente convergente si* $-2 < x < 2$*, condicionalmente convergente si* $x = -2$ *y diverge si* $x > 2$ *o* $x < -2$.

■

Ejemplo 2.6.2

Determine los valores de x para los cuales la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es convergente.

▲

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

Concluimos que la serie de potencias dada es absolutamente convergente para todo x real.

■

Ejemplo 2.6.3

Determine los valores de x para los cuales la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$$

es convergente.

▲

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ \infty & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Concluimos que la serie de potencias dada converge solo para $x = 0$.

■

En cada uno de nuestros ejemplos, el conjunto de convergencia fue un intervalo (degenerado en el último ejemplo). Este será siempre el caso. Por ejemplo, es imposible que una serie de potencias tenga un conjunto de convergencia que consista en dos partes desconectadas (como $[0,1] \cup [3,4]$*)*

Teorema 2.6.1

$Sea \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \ una\ serie\ de\ potencias.$

Entonces, se cumple exactamente una de las siguientes condiciones:

1. *La serie converge sólo cuando* $x = 0$
2. *La serie es absolutamente convergente para todos los valores de x.*
3. *Existe* $R > 0$ *tal que la serie converge para* $|x| < R$ *y diverge para* $|x| > R$

♦

Si en lugar de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tenemos* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, *en el teorema* 2.6.1

las condiciones (1). , (3). se convierten en

1. *La serie converge cuando* $x = c$.

3. *Existe* $R > 0$ *tal que la serie converge para* $|x-c| < R$ *y diverge para* $|x-c| > R$.

El conjunto de x para los cuales una serie converge se llama ***intervalo de convergencia*** *de la serie de potencias. El número R se llama* ***radio de convergencia*** $\left(R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|\right)$

♦

Ejemplo 2.6.4

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n*1}^{\infty} n(x-2)^n$$

▲

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)(x-2)^{n+1}}{n!\,(x-2)^n}\right| = |x-2| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |x-2|$$

Entonces la serie converge absolutamente si $|x-2| < 1$, *es decir* $1 < x < 3$.

Analicemos que pasa en los extremos del intervalo

Cuando $x = 1$, *la serie se transforma en*

$$\sum_{n*1}^{\infty} (-1)^n n\,,$$

la cual es divergente, ya que $\lim_{n\to\infty} n \neq 0$

Cuando $x = 3$, *la serie es*

$$\sum_{n*1}^{\infty} n\,,$$

la cual también diverge.

Así, la serie dada tiene como dominio el intervalo $(1,3)$.

■

2.7 Derivación e integración de series de potencias

Sabemos que el intervalo de convergencia de una serie de potencias es el dominio de una función $f(x)$*, la suma de la serie. La pregunta más obvia con respecto a* $f(x)$ *es la de si se puede dar una fórmula simple para ella. Lo hemos hecho para una, la serie geométrica.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}\,, \qquad -1 < x < 1$$

Una mejor pregunta que se puede hacer ahora es si hay algo que decir con respecto a las propiedades de $f(x)$*. Por ejemplo ¿es diferenciable? ¿es integrable? La respuesta a ambas preguntas es afirmativa.*

Teorema 2.7.1

Si la función dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

Tiene radio de convergencia $R > 0$*, es continua en el intervalo* $(c-R, c+R)$*, derivable e integrable. Entonces, la derivada y la integral de* f *viene dada por*

1. $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$

2. $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$

El radio de convergencia de la serie obtenida por derivación o integración es el mismo que el de la serie original.

Ejemplo 2.7.1

Determine el intervalo de convergencia de

$$f(x), f'(x)\ y \int_0^x f(t)dt\,, \qquad donde\ f(x) = \sum_{n*1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

▲ *Para* $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx^{n+1}}{x^n(n+1)}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x| < 1$$

Cuando $x = -1$ *tenemos la serie alterna armónica*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\ , convergente.$$

Cuando $x = 1$*, la serie armónica*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\ , divergente.$$

Así el intervalo de convergencia de $f(x)$ *es* $[-1,1)$.

Por el teorema 2.12.1 sabemos que cada serie de éstas tiene radio de convergencia $R = 1$. *Considerando el intervalo* $(-1,1)$ *se tiene:*

$$f'(x) = \sum_{n*1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n*1}^{\infty} x^{n-1}$$

Cuyo intervalo de convergencia es $(-1,1)$*, ya que diverge para* $x = \pm 1$.

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n*1}^{\infty}\int_0^x \frac{t^n}{n}dt = \sum_{n*1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

Cuyo intervalo de convergencia es $[-1,1]$*, ya que para* $x = -1$*, la serie es*

$$\sum_{n*1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\ ,$$

que converge absolutamente y para$x = 1$*, la serie es*

$$\sum_{n*1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \ ,$$

que también converge.

Así, el intervalo de convergencia de la integral es$[-1,1]$

■

Ejemplo 2.7.2

Obtenga una representación de series de potencias de

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

▲ *Sabemos que*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad |x| < 1$$

Derivando ambos miembros, obtenemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \qquad |x| < 1$$

■

Ejemplo 2.7.3

Pruebe que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ , para\ todo\ x$$

▲ *Ya vimos que la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es absolutamente convergente para todo x. Por lo tanto, si $f(x)$ *es la función definida por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

tiene dominio $(-\infty,\infty)$. *Luego para todos los valores de x tenemos que*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

Entonces vemos que $f(x) = f'(x)$ *para todo x real, es decir,* $f(x) = e^x$.

Ejemplo 2.7.4

Encuentre una representación en serie de potencias de

$$\int_0^x e^{-t^2}dt$$

▲ *Sabemos que*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para todo x real, entonces sustituyendo x por $-x^2$, *tenemos que*

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \text{ , para todo } x \text{ real.}$$

Luego integrando obtenemos

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)!} \quad \text{para todo } x \text{ real.}$$

■

Ejemplo 2.7.5

Encuentre una representación en serie de potencias de para arctan x.

▲

Recuerde que

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

Sabemos que,

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad |x|<1$$

Reemplazando x por $-t^2$, obtenemos

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \qquad |t|<1$$

Por lo tanto,

$$\arctan x=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x|<1$$

■

Ejemplo 2.7.6

Encuentre una representación en serie de potencias de para $ln(1+x)$.

▲ *Sabemos que*

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad |x|<1$$

Al integrar término a término se obtiene

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

Esto es,

$$-ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots+\frac{x^n}{n}+\cdots \qquad |x|<1$$

Si reemplazamos x por –x en la última y multiplicamos por -1, obtenemos

$$ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\cdots \qquad |x|<1$$

■

2.8 Serie de Taylor

En la sección anterior obtuvimos series de potencias para varias funciones usando series geométricas junto con derivadas o integración término a término. En esta sección desarrollaremos un procedimiento general para hallar series de potencias para una función con derivadas de todo orden.

Si f viene representada por una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

Cuyo radio de convergencia es $R > 0$, de lo antes visto sabemos que f tiene derivada de todos los órdenes en $(-R, R)$.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2.3a_3 x + 3.4a_4 x^2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$f'''(x) = 2.3a_3 + 2.3.4a_4 x + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \cdots \qquad \ldots\ldots(4)$$

Si hacemos $x = 0$ en (1), (2), (3), (4) obtenemos

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 2a_2 \Longrightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$f'''(0) = 2.3a_3 \Longrightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

En general,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

para todo entero positivo n

Esta fórmula es válida cuando $n = 0$, *si consideramos que* $f^0(0) = f(0) = 1$ *y* $0! = 1$ *Así podemos escribir la serie de potencias de f en x como*

$$f(x) = \sum_{n*1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

Más general, si consideramos la serie de potencias de f en $(x - a)$ *tenemos que*

$$\sum_{n*1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Esta serie se llama ***serie de Taylor*** *de f en c. Cuando* $c = 0$ *se llama* ***Serie de Maclaurin****.*

♦

2.8.1 Convergencia de la serie de Taylor

Dada una función f, ¿podemos representarla por medio de una serie de potencias en $(x - a)$ *(que debe ser, necesariamente, la serie de Taylor)?*

Teorema 2.8.1

Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en algún intervalo $(a - r, a + r)$. *La serie de Taylor*

$$\sum_{n*1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Representa a la función f en el intervalo $(a - r, a + r)$ *si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

donde c es algún punto en $(a - r, a + r)$

♦

Ejemplo 2.8.1

Determine la serie de Maclaurin de $f(x) = sen\ x$ y demuestre que representa a sen x para todo x.

▲

$$f(x) = sen\ x \Longrightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = cos\ x \Longrightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -sen\ x \Longrightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -cos\ x \Longrightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{iv}(x) = sen\ x \Longrightarrow f^{iv}(0) = 0$$

$$f^{v}(x) = cos\ x \Longrightarrow f^{v}(0) = 1$$

El esquema se repite tras la tercera derivada, luego la serie de potencias es

$$f(x) = \sum_{n*1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Y será válida para todo x, siempre que podamos demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c) x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Ahora bien,

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = |cos\ x| \ \ o \ \left|f^{(n+1)}(x)\right| = |sen\ x|$$

por lo tanto,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$Pero, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0\ para\ todo\ x, ya\ que\ \dfrac{x^n}{n!}\ es\ el\ n-ésimo\ término\ de\ una\ serie$

$convergente. Entonces\ \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

■

Ejemplo 2.8.2

Determine la serie de Maclaurin de $f(x) = cosh\ x$ de dos maneras distintas y demuestre que representa a cosh x para todo x.

▲ ***Método 1.*** *Éste es el método directo*

$f(x) = cosh\ x \Longrightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = senh\ x \Longrightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = cosh\ x \Longrightarrow f''(0) = 1$

$f'''(x) = senh\ x \Longrightarrow f'''(0) = 0$

Por lo tanto,

$$cosh\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}$$

$siempre\ que\ podamos\ demostrar\ que\ \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0\ para\ todo\ x.$

Sea B un número cualquiera tal que $|x| \leq B$. Entonces

$$|cosh\ x| \leq \left|\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right| \leq \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \leq \frac{e^B}{2} + \frac{e^B}{2} = e^B$$

Mediante un razonamiento análogo, $|senh\ x| \leq e^B$.

Ya que $f^{(n+1)}(x) = cosh\,x$ *o* $f^{(n+1)}(x) = senh\,x$*, concluimos que*

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{e^B|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

La última expresión tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Método 2. *Utilizando el hecho de que*

$$cosh\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Sabemos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Ahora bien, sumando estas dos series y dividiendo por 2 se obtiene

$$cosh\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}$$

■

Parte II

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Capítulo 3

3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En cursos anteriores nos hemos encontrado frecuentemente con la palabra ecuación la cual utilizamos en muy variadas ocasiones, por ejemplo:

1. *Las ecuaciones:* $x^2 - 3x + 2 = 0, x^3 - 1 = 0, \ldots$
2. *Las ecuaciones* $Sen\ x = 0, tan\ x = cos\ x\ , sec\ x = e^x$

En estos casos se trata de hallar que son las incógnitas de las ecuaciones.

Existen numerosos problemas de la Matemática, la Física, la Ingeniería, que conducen a plantear ecuaciones pero donde ahora las incógnitas ya no son números sino objetos matemáticos: matrices, funciones, aplicaciones lineales.

Entre estas ecuaciones se encuentran las denominadas ***ecuaciones diferenciales*** *en las cuales la (s) incógnita (s) que se presentan son funciones, y se llaman diferenciales puesto que en dichas ecuaciones figuran las derivadas de las funciones incógnitas.*

El ejemplo más sencillo de ecuación diferencial se encuentra en la determinación de primitivas de una función f, lo cual simplemente viene dado por el Primer teorema fundamental del Cálculo y que permite relacionar la derivación con la integración:

Si f *es una función continua* $[a, b]$, *entonces la función F definida por:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es derivable y $F´(x) = f(x)\ para\ todo\ x \in (a, b)$.

Así, dada f, la función $y = F(x)$ *satisface la ecuación* $\frac{dy}{dx} = f$ *que es el ejemplo, de los más simples, de ecuación diferencial de orden uno, donde la función* ***incógnita*** *F figura a través de su derivada.*

Nuestro objetivo en este curso es estudiar algunos tipos de ecuaciones diferenciales para los cuales existen procedimientos canónicos de resolución. Debemos señalar que ésta es una de las ramas de la Matemática que más profundamente se ha estudiado desde unos 300 años, siendo la Mecánica Celeste la primera área donde se aplicó intensamente la teoría de las ecuaciones diferenciales.

3.1 Nociones básicas acerca de las ecuaciones diferenciales

Comencemos con dos ejemplos que conducirán a plantear una ecuación diferencial y así éstos motivarán algunas definiciones que luego daremos.

3.1.1 Ley de Newton sobre enfriamiento de un cuerpo

De acuerdo con la ***ley de Newton sobre enfriamiento o calentamiento de un cuerpo****, la rapidez a la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio ambiente.*

Sea $T = T(t)$ *la temperatura del cuerpo en un tiempo cualquiera t. La velocidad de enfriamiento del cuerpo, es decir, la tasa instantánea de cambio de temperatura es dada por la derivada.*

$$\frac{dT}{dt}$$

Luego si denotamos por A la temperatura del aire que rodea al cuerpo, entonces el enunciado del problema nos dice que

$$\frac{dT}{dt}\ es\ prorcional\ a\ T-A, es\ decir, \frac{dT}{dt}=c(T-A)$$

$$\frac{dT}{dt}=c(T-A)\ \dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

donde c es la constante de proporcionalidad. Siendo $T-A>0$ *(la temperatura del cuerpo mayor que la del aire que lo rodea), entonces, como la temperatura* $T(t)$ *decrece a medida que* *transcurre el tiempo, ya que el cuerpo se está enfriando, se tiene que* $c < 0$*, y por esto, frecuentemente, se escribe la ecuación (1) como:*

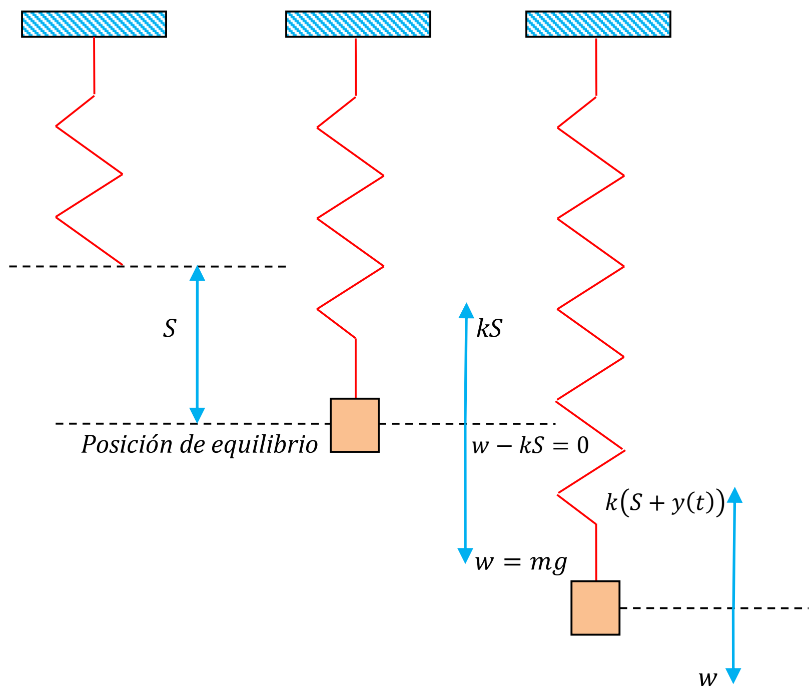
$$\frac{dT}{dt} = -c(T - A) \quad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

El problema consiste en hallar una tal función $T(t)$ *que satisfaga (2) y además los otros datos del problema.*

♦

3.1.2 Desplazamiento de un resorte

Consideremos un resorte que resiste la comprensión tanto como la extensión y que cuelga o está sujeto en un extremo a un soporte y en el otro extremo se tiene un cuerpo de masa m



Si se tira del cuerpo desplazándolo una cierta distancia "hacia abajo" y después se le suelta, este adquirirá un movimiento el cual suponemos se realiza solamente en la dirección vertical y queremos determinar este movimiento en función del tiempo t. Elijamos como dirección positiva del desplazamiento la dirección "hacia abajo". Veamos todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo durante el movimiento.

Tenemos la fuerza de gravedad (peso del cuerpo) dada $w = mg$, *donde m es la masa del cuerpo y g la aceleración de gravedad.*

De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza restauradora F_s *que el resorte ejerce sobre la masa es proporcional a la distancia a la que el resorte se ha estirado o comprimido. Puesto que ésta es igual al desplazamiento de la masa m de su posición de equilibrio, se deduce que*

$$F_s = -k\big(S + y(t)\big)$$

La constante positiva de proporcionalidad k se llama ***la constante de resorte.***

Aplicando la 2da. Ley de Newton,

$$F = ma = my'' = w - kS - ky$$

Como $w - kS = 0$, *obtenemos la ecuación diferencial lineal de segundo orden*

$$my'' = -ky$$

Es decir,

$$y'' = -w^2 y, \ \ donde \ \ w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

que gobierna el ***movimiento vertical libre de un cuerpo****.*

En el ejemplo anterior se ha despreciado la fuerza de resistencia del medio F_m *y por ello se le llamo movimiento libre. Experimentalmente se ha comprobado que, si la velocidad de la masa no es muy grande,* F_m *es proporcional a la velocidad* $\left|\frac{dy}{dx}\right|$, *y su dirección es tal que se opone al movimiento. Si el cuerpo está bajando,* $y(t)$ *está aumentando, por lo tanto* $\frac{dy}{dx} > 0$ *y como* F_m *actúa hacia arriba, resulta*

$$F_m = -c\frac{dy}{dx}, \qquad c > 0$$

Si el cuerpo está subiendo, $y(t)$ *está disminuyendo, por lo tanto* $\frac{dy}{dx} < 0$ *y como* F_m *actúa hacia abajo resulta*

$$F_m = c\left(-\frac{dy}{dx}\right) = -c\frac{dy}{dx}$$

O sea que en cualquier caso $F_m = -c\frac{dy}{dx}$ *con* $c > 0$. *Luego la ecuación diferencial que rige el* ***movimiento vertical amortiguado del cuerpo*** *es*

$$my'' = -ky - cy'$$

Es decir,

$$my'' + cy' + ky = 0$$

EDO lineal de segundo orden.

♦

En esos dos ejemplos observamos que se trata de resolver una ecuación donde la incógnita es una función de una, o más variables independientes, y que en dicha ecuación aparecen derivadas de la función. Tales ecuaciones reciben el nombre de ***ecuaciones diferenciales ordinarias*** *o* ***ecuaciones diferenciales en derivadas parciales****, o simplemente, a las primeras se les llama* ***ecuaciones diferencial*** *y a las segundas* ***ecuaciones en derivadas parciales****.*

Definición 3.1

Una ***ecuación diferencial*** *es una ecuación en la que interviene una función desconocidas y una o más de sus derivadas. Si la función tiene solamente una variable independiente, la ecuación se denomina* ***ecuación diferencial ordinaria****. Si la función depende de dos o más variable, las derivadas serán parciales, denominándose la ecuación en este caso* ***ecuación diferencial en derivadas parciales****.*

♦

Además de por el tipo (ordinaria o parcial), las ecuaciones diferenciales se clasifican por el orden.

El ***orden*** *de una ecuación diferencial es el de la derivada más alta que aparece en la ecuación.*

Ambas clasificaciones (tipo y orden) resultan útiles para decidir que procedimiento utilizar para resolver una ecuación diferencial dada.

Ecuación	***Tipo***	***Orden***
$\frac{dy}{dx} = 0$	*Ordinaria*	*1*
$y''' = ln\, x$	*Ordinaria*	*3*
$(y')^2 - 3y = 0$	*Ordinaria*	*1*
$u_{xx} + u_{yy} = 0$	*Parcial*	*2*

Un problema matemático típico de una situación aplicada serán los ***problemas de valores iniciales****, consistentes en una ecuación diferencial de la forma antes citada junto con una* ***condición inicial*** $y(x_0) = y_0$.

Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \; \dots\dots\dots\dots (4)$$

Significa encontrar una función diferenciable $y(x)$ *que satisfaga ambas condiciones de la ecuación.*

♦

Definición 3.2

Una función $y = f(x)$ *es* ***solución*** *de una ecuación diferencial si al ser sustituida, junto con sus derivadas, en la ecuación, la convierte en una identidad.*

♦

Ejemplo 3.1.1

Derivando y sustituyendo veríamos que $y = e^{-2x}, y = 3e^{-2x}$ *son soluciones de la ecuación diferencial*

$$y' + 2y = 0$$

■

Definición 3.3

Si la solución de la ecuación diferencial es una función $y = f(x, c)$ *que depende de alguna constante arbitraria C (familia uno-paramétrica) entonces la solución se llama* ***solución general***

♦

Ejemplo 3.1.2

La función $y = Ce^{-2x}$*, siendo C una constante cualquiera, es la solución general de la ecuación*

$$y' + 2y = 0$$

Definición 3.4

Si en la solución general se asigna un valor determinado a la constante C, la solución obtenida es una ***solución particular****. El valor de C puede ser obtenido al reemplazar, las coordenadas de algún punto que satisface la ecuación diferencial en la solución hallada; tales coordenadas del plano reciben el nombre de* ***condiciones iniciales*** *y la solución es la que satisface las condiciones iniciales dadas. En ciertas ocasiones, la ecuación diferencial posee otras soluciones, denominadas* ***soluciones singulares,*** *ellas no se obtienen de la solución general.*

♦

3.2 Algunos problemas que conducen a una ecuación diferencial

Dada una familia de curvas F, a veces es importante encontrar una ecuación diferencial que la represente, es decir , EDO libre de parámetros, tal que los miembros de la familia F sean todas las solucione de la ecuación.

Ejemplo 3.2.1

Hallar una EDO que represente a la familia de parábolas $y = 3kx^2 + k,\ k \in \mathcal{R}$

▲ *Despejando k de la ecuación de las parábolas se obtiene*

$$k = \frac{y}{3x^2 + 1}$$

Derivando respecto de x

$$y' = 6kx = \frac{6ky}{3x^2 + 1}$$

La EDO que representa a la familia de parábolas dada es entonces

$$y' = \frac{6k}{3x^2 + 1}y$$

■

3.2.1 Trayectoria ortogonales

Sea C una curva dada y F una familia uniparamétrica de curvas. Se dice que C es una trayectoria ortogonal de la familia F si C corta ortogonalmente a todas las curvas de F.

♦

Para determinar las trayectorias ortogonales de una familia de curvas dada se halla primero la ecuación diferencial $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ *para dicha familia. Como* $\frac{dy}{dx}$ *da la pendiente de la recta tangente a cada curva de la familia en un punto* (x, y) *de la misma, la ecuación diferencial para las trayectorias ortogonales a la familia dada debe ser*

$$F\left(x, y, -\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Ejemplo 3.2.1.1

Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia F de parábolas de ecuaciones

$$y = kx^2, \qquad k \in \mathbb{R}$$

▲ *Despejando k de la ecuación se obtiene*

$$k = \frac{y}{x^2}, \qquad x \neq 0$$

Además,

$$y' = 2kx = \frac{2y}{x^2}x = \frac{2y}{x}$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

Es la ecuación diferencial la familia F, para todo $x \neq 0$*. Por lo tanto, la ecuación diferencial para las trayectorias ortogonales es*

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

Es decir,

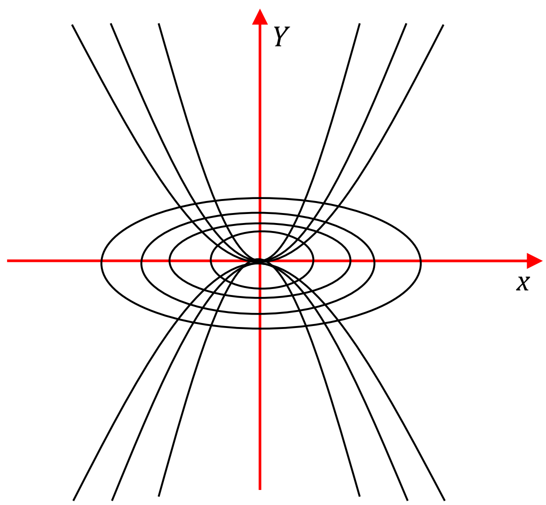
$$xdx + 2ydy = 0, \qquad x \neq 0$$

Resolviendo esta EDO se obtiene (como se verá adelante) que

$$2y^2 + x^2 = r, \qquad con\, r \in \mathbb{R}$$

Son trayectorias ortogonales de la familia dada. Sin embargo, se debe notar que la recta de ecuación $x = 0$*, es ortogonal a todas las parábolas de la familia en* $(0,0)$ *(pues cuando* $x = 0, y' = 2kx = 0$*, es decir, la ente de todas las curvas de F es cero en* $(0,0)$*). Las trayectorias ortogonales de la familia son entonces*

$$x \equiv 0 \quad y \quad 2y^2 + x^2 = r, \qquad con\, r \in \mathbb{R}$$



■

3.2.2 Crecimiento y decrecimiento o desintegración

a) Crecimiento de una población:

La velocidad de crecimiento de una población, es un instante dado, es proporcional a la población existente en dicho instante.

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde P = población existente en el instante t (habitantes)

$$\frac{dP}{dt} = Velocidad\ instantanea\ de\ variación\ de\ la\ población$$

K = constante de proporcionalidad

b) Ley de desintegración radioactiva:

La intensidad o velocidad de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional, en cualquier instante, a la cantidad de sustancia que se halle presente.

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

donde m = masa de sustancia radiactiva presente en el instante t

$$\frac{dm}{dt} = Velocidad\ instantanea\ de\ variación\ de\ la\ masa$$

K = constante de proporcionalidad

El signo menos indica que la masa está disminuyendo

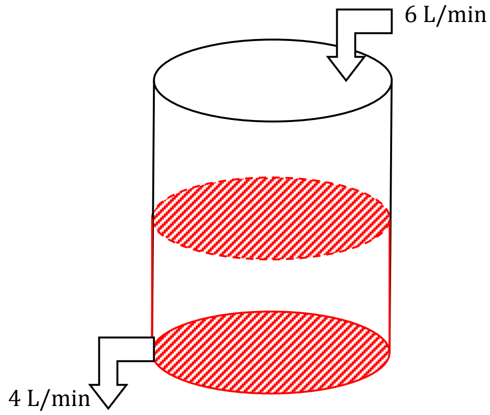
♦

3.2.3 Mezclas

UN tanque tiene 100 L de una solución de agua y sal (salmuera), que contiene 10 Kg de sal homogéneamente mezclados. Se bombea dentro de un tanque a una velocidad de 6 L/min una solución que contiene ½ Kg de sal por cada litro de agua. Simultáneamente se bombea hacia afuera el líquido del tanque a una velocidad de 4 L/min. Hallara la cantidad de sal que hay en el tanque en cada instante t.

▲ *Sea* $x(t)$ *la cantidad de sal presente en el tanque después de t minutos de haber comenzado a bombear. Entonces la rapidez de cambio de la cantidad de sal en el tanque es* $x'(t)$, *y se cumple*

$$x'(t) = \binom{rapidez\ con\ que}{entra\ la\ sal} - \binom{rapidez\ con\ que}{sale\ la\ sal} = R_{entrada} - R_{salida}$$



Por otro lado nótese que se bombea hacia afuera con menor rapidez que hacia adentro, por lo que la solución se acumula con una rapidez de $\frac{(6-4)L}{min} = 2\frac{L}{min}$.

Por lo tanto, después de t minutos hay en el tanque $(100+2t)$ *litros solución, la rapidez con que sale la sal es*

$$R_2 = \left(\frac{x(t)}{100+2t}\right) kg/l\ .4\ l/min = \frac{4x(t)}{100+2t} kg/min$$

Entonces

$$x´(t) = R_{entrada} - R_{salida} = 6\ l/\text{min}.1/2\ kg/l - \frac{4x(t)}{100+2t} kg/min$$

Luego

$$\begin{cases} x´(t) = 3 - \dfrac{2x(t)}{50+t} \\ \\ x(0) = 10 \end{cases}$$

■

3.2.4 Circuitos eléctricos

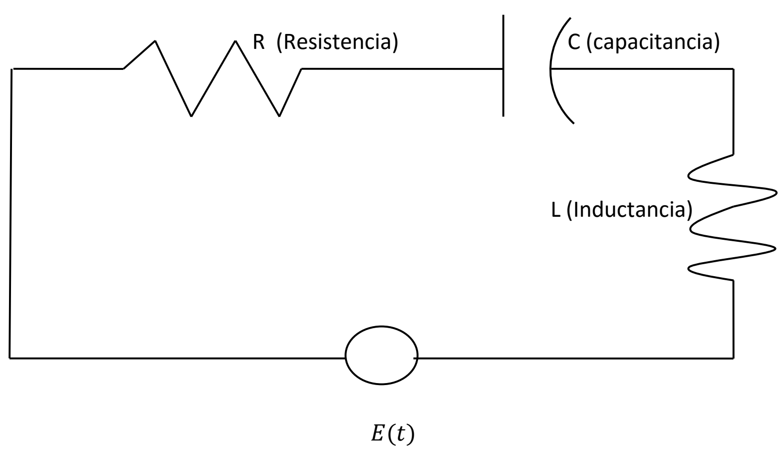
Consideremos el circuito en serie que consta de:

*Una **resistencia** de **R ohmios***

*Un **inductor** con inductancia de **L henrios***

*Un **condensador**, con capacitancia de **C faradios***

Con una fuente de fuerza electromotriz (tal como una batería o un generador) que proporciona un voltaje de $E(t)$ voltios en el instante t.



Aplicando una de las leyes de Kirchhoff: La suma (algebraica) de las caídas de voltaje a través de los elementos de un circuito eléctrico es igual al voltaje aplicado.

En consecuencia, la corriente y la carga en el circuito simple RLC de la figura satisfacen la ecuación básica de los circuitos.

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Como la relación entre la carga Q y la corriente I, es $\frac{dQ}{dt} = I$, *sustituyendo en la ecuación (1) obtenemos la ecuación diferencial lineal de segundo orden, para la carga* $Q(t)$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

En la mayoría de los problemas prácticos en la corriente I, más que la carga Q, lo que tiene interés primario, así que podemos derivar ambos miembros de la ecuación (1) y hacer la sustitución $\frac{dQ}{dt} = I$ *para obtener*

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE(t)}{dt} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

♦

Parte III

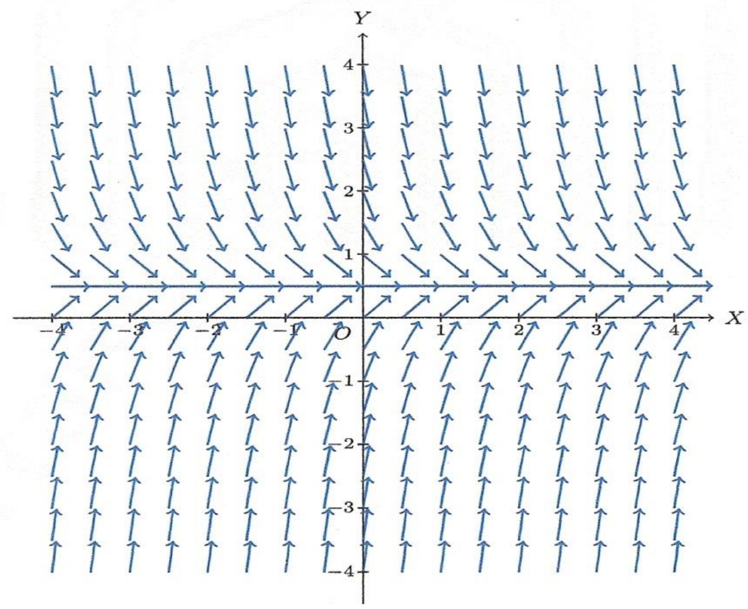
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

3.3 Campos direccionales y elaboración de curvas integrales

Una EDO de primer orden no siempre tiene solución pero, aún cuando la tenga, a veces no es posible encontrar una fórmula explícita de la misma en términos de funciones elementales. Por tal motivo los métodos que conducen a soluciones aproximadas de la ecuación son de gran utilidad. Uno de estos métodos consiste en aproximar gráficamente las curvas integrales de la ecuación diferencial, cuando ésta es de primer orden.

Definición 3.3.1

La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ *da un valor para* y' *que representa la pendiente de la recta tangente a la curva integral* $y = \phi(x)$ *que pasa por el punto* (x, y)*. Si se asigna a cada punto un pequeño segmento de esta recta tangente (centrado en el punto), el conjunto de todos estos segmentos se llama* ***campo direccional*** *para la ecuación diferencial* $y' = f(x, y)$*. Es decir, la ecuación diferencial* $y' = f(x, y)$ *determina un campo de direcciones.*

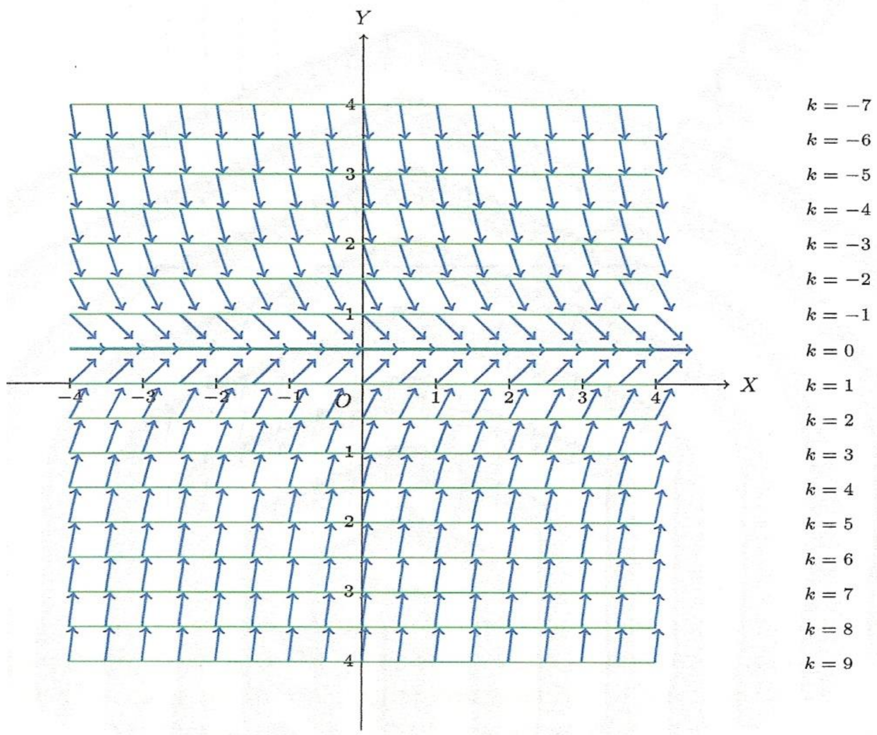


Campo direccional asociado a la EDO $y' = 1 - 2y$

El problema de integración de la ecuación $y' = f(x, y)$ *consiste en hallar una curva cuya tangente en cada punto tenga la misma dirección que el campo en ese punto.*

Definición 3.3.2

Dada una ecuación $y' = f(x,y)$, *una isóclina es el lugar geométrico de todos los puntos en los cuales las tangentes a las curvas integrales consideradas tienen una misma dirección. La familia se determina por la ecuación* $k = f(x,y)$ *donde* k *es un parámetro.*



Isoclinas asociadas a la EDO $y' = 1 - 2y$

Ejemplo 3.3.1

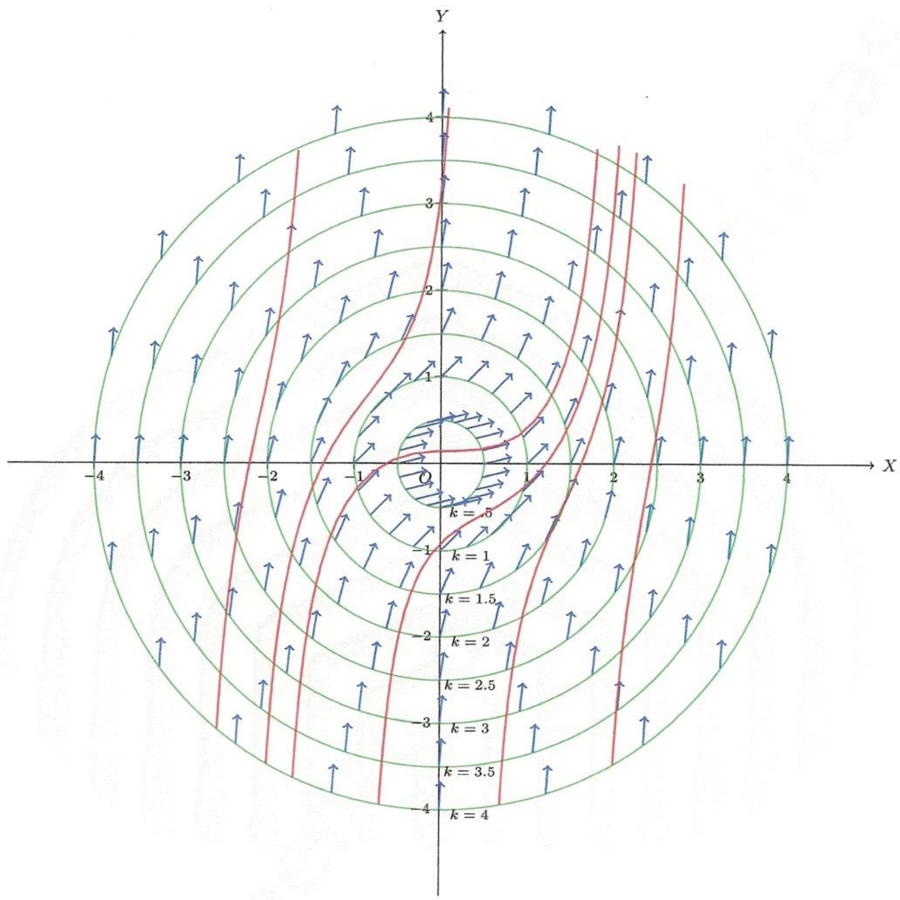
Usando isóclinas, bosqueje las curvas de

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

▲ *Haciendo* $\frac{dy}{dx} = k$, *tenemos que las isóclinas están dadas por ecuaciones de la forma*

$$k = x^2 + y^2$$

Estás ecuaciones son circunferencias centradas en el origen para $k > 0$, se reduce al origen si $k = 0$ (porque $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$) y no tienen puntos para $k < 0$.



Isoclinas y curvas integrales asociadas a la EDO $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

■

3.4 Existencia y unicidad de las soluciones

Antes de perder mucho tiempo tratando de resolver una ecuación diferencial, es preferible investigar si la solución en efecto existe. Quizá también queramos saber si hay sólo una solución de la ecuación que satisfaga una condición inicial (es decir, si las soluciones son únicas).

Ejemplo 3.4.1

Consideremos el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}\,, \quad y(0) = 0$$

De aquí podemos hacer

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$$

Luego integramos y resulta $y_1(x) = x^2$ *y* $y_2(x) = 0$

■

Las cuestiones relativas a existencia y unicidad también afectan a la elaboración de modelos matemáticos. Supongamos que estamos estudiando un sistema físico cuyo comportamiento está completamente determinado por ciertas condiciones iniciales, pero que nuestro modelo matemático propuesto involucra una ecuación diferencial que no tiene solución única. Esto hace surgir de inmediato la pregunta de si el modelo matemático representa adecuadamente el modelo físico.

El siguiente teorema establece las condiciones suficientes para asegurar la existencia y unicidad de la solución, de modo que ninguno de los casos extremos (no solución o soluciones no únicas) pueda ocurrir.

Teorema: Existencia y unicidad de soluciones

Sea $y' = f(x,y)$ *donde* f *es una función continua y derivable en un conjunto D del plano. Entonces por todo punto* $(x_0, y_0)\epsilon D$ *pasa una y solamente una solución de esa ecuación diferencial.*

Es decir, para todo punto $(x_0, y_0)\epsilon D$*, existe una y sólo una función* $y = y(x)$ *definida en cierto intervalo que contiene a* x_0*, que es solución de la ecuación* $y' = f(x,y)$ *y además* $y_0 = y_0(x)$.

♦

Ejemplo 3.4.2

Para la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$$

la función $f(x,y) = 2\sqrt{y}$ *es continua en toda su extensión, pero la derivada parcial*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

es discontinua para $y = 0$, *y en consecuencia en el punto* $(0,0)$*. Esto explica la existencia de dos soluciones diferentes* $y_1(x) = x^2$ *y* $y_2(x) = 0$ *, cada una de las cuales satisface la condición inicial* $y(0) = 0$.

■

3.5. Ecuaciones diferenciales de primer orden

3.5.1 Ecuaciones a variables separables

La ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = H(x, y)$$

Se llama ***a variable separable*** *si* $H(x, y)$ *puede escribirse como producto de una función de* x *y una función de* y*; o, equivalentemente, como un cociente*

$$H(x, y) = \frac{g(x)}{f(y)}.$$

En este caso, las variables pueden ser separadas escribiendo de modo informal la ecuación $f(y)dy = g(x)dx$*, que se entiende que es la notación compacta de la ecuación diferencial*

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Es fácil resolver este tipo de ecuaciones diferenciales simplemente integrando ambos miembros con respecto a x

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + c$$

♦

Ejemplo 3.5.1.1

Determinar en cuanto tiempo se enfriara un cuerpo desde 100ºC a 20ºC en aire a 10ºC, sabiendo que en el aire a 15 ºC se enfría desde 200 ºC a 100ºC en 40 minutos.

▲ *Obtuvimos la ecuación a variable separable*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$$

Donde $k > 0$ *es constante,* A *temperatura del aire,* $T = T(t)$ *es la temperatura del cuerpo en un tiempo* t*. De allí resulta*

$$\frac{dT}{T-A} = -kdt \Longrightarrow \int \frac{dT}{T-A} = -k\int dt + c'$$

Luego

$$ln(T-A) = -kt + c' \Longrightarrow T - A = e^{-kt+c'} = ce^{-kt}$$

donde $c = e^{c'}$ *(constante arbitraria)*

Nótese que cuando $t = 0$ *(en minutos), es decir, cuando comenzamos a contar el tiempo, se tiene* $T(0) = T_0$ *(temperatura inicial), luego* $T_0 - A = c$.

Entonces tenemos que

$$T = A + (T_0 - A)e^{-kt}$$

Ahora utilizando los datos del enunciado para determinar la constante de enfriamiento k:

Si $t = 40\ min$ *y* $A = 15^oC$ *se tiene* $T_0 = 200^oC,\ T = 100^oC$*, luego*

$$100 = 15 + (200-15)e^{-40k} \Longrightarrow e^{-40k} = \frac{85}{185} \Longrightarrow k = -\frac{1}{40}ln\left(\frac{17}{37}\right)$$

y por lo tanto,

$$T = A + (T_0 - A)e^{\left(\frac{1}{40}ln\left(\frac{17}{37}\right)\right)t}$$

Si ahora $A = 10^oC,\ T_0 = 100^oC,\ T = 20^oC$*, se obtiene*

$$20 = 10 + (100-10)e^{\left(\frac{1}{40}ln\left(\frac{17}{37}\right)\right)t} \Longrightarrow \frac{1}{9} = e^{\left(\frac{1}{40}ln\left(\frac{17}{37}\right)\right)t}$$

Entonces

$$t = \frac{-40\ ln\,9}{ln\,17 - ln\,37} \approx 113\ min$$

■

Ejemplo 3.5.1.2

Un cultivo tiene inicialmente una cantidad N_0 *de bacterias. Para* $t = 1$ *hora, el número de bacterias medido es* $\frac{3}{2}N_0$. *Si la rapidez de multiplicación es proporcional al número de bacterias presentes, determinar el tiempo necesario para que el número de bacterias de triplique.*

▲ *Sean* N *= bacterias en un instante t*

$N_0 =$ *Cantidad de bacterias en* $t = 0$

Tenemos que

$$\frac{dN}{dt} = kN \Longrightarrow \frac{dN}{N} = kdt \Longrightarrow ln\, N = kt + ln\, C \Longrightarrow N = Ce^{kt}$$

Pero para $t = 0,\; N(0) = N_0$,

Entonces $N_0 = C$. *Así* $N(t) = N_0 e^{kt}$

Para $t = 1$ *se tiene* $\frac{3}{2}N_0 = N_0 e^k$ *o bien*

$$e^k = \frac{3}{2} \Longrightarrow k = ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}4055$$

En consecuencia,

$$N(t) = N_0 e^{0{,}4055t}$$

Para determinar el valor de t para el que las bacterias se triplican, despejamos t de

$$3N_0 = N_0 e^{0{,}4055t}$$

Se deduce que

$$0{,}4055t = ln\, 3 \Longrightarrow t = \frac{ln\, 3}{0{,}4055} \approx 2{,}71\; horas$$

■

Ejemplo 3.5.1.3

Un bloque de cierto material radiactivo tiene originalmente una masa de 100 grs., al transcurrir 20años, su masa ha disminuido a 80 grs. Determinar:

a) ¿Cuánto tiempo transcurrió para que se desintegraran 10 grs.?

b) Cantidad de material presente 50 años después del momento inicial.

c) Tiempo de vida media del material.

▲ *Sean m = masa del material radiactivo en un instante de tiempo t*

$m_0 = 100\ grs\ (masa\ inicial$

Tenemos que

$$\frac{dm}{dt} = -jm \Longrightarrow \frac{dm}{m} = -kdt \Longrightarrow ln\, m = -kt + ln\, C_1 \Longrightarrow m = Ce^{-kt} = m_0e^{-kt}$$

Calculemos k

$$m(0) = 80 \Longrightarrow 80 = m_0e^{-20k} \Longrightarrow k = \frac{-ln(4/5)}{20}$$

a) $t = ?$

$$m(t) = 90 \Longrightarrow 90 = 100e^{-kt} \Longrightarrow -kt = ln(9/10) \Longrightarrow t = \frac{-ln(1/2)}{k} \approx 9{,}443$$

b) $\mathrm{t} = 50$ años, $\mathrm{m}(50) = ?$

$$\mathrm{m}(50) = 100\mathrm{e}^{-50\mathrm{k}} = 100\mathrm{e}^{20\ln(4/5)/20} \approx 57{,}243$$

c) $m(t_m) = \frac{m_0}{2} \Longrightarrow \frac{m_0}{2} = m_0e^{-kt_m} \Longrightarrow t_m = \frac{-ln(0{,}5)}{k} \approx 155{,}314$

■

3.6 Ecuaciones homogéneas

Recordemos que una función $f(x,y)$ se dice homogénea de grado un número real n, si para todo $t>0$, se verifica que

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

♦

Ejemplo 3.6.1

$a.\ f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2x}$ $\ \ es\ homogénea\ de\ grado\ n=1, ya\ que$

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)^2+(ty)^2}{2tx}=\frac{t(x^2+y^2)}{2x}=tf(x,y)$$

$b.\ g(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ $\ \ es\ homogénea\ de\ grado\ n=0\ (Compruebelo)$

$c.\ h(x,y)=\sqrt[3]{x}sen\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\ \ es\ homogénea\ de\ grado\ n=\dfrac{1}{3}\ \ (Compruebelo)$

$d.\ f(x,y)=x^2y^3+x^3y^2+x+1$ $\ \ no\ es\ homogénea$

$e.\ h(x,y)=\sqrt[3]{x}sen\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$ $\ \ no\ es\ homogénea$

■

En muchos casos podemos reconocer si una función es homogénea examinando el grado de cada término

Ejemplo 3.6.2

$a.\ \ f(x,y)=6xy^3-x^2y^2$ $\ es\ homogénea\ de\ grado\ 4$

Observe que $6\ xy^3$ $es\ de\ grado\ 4\ \ y\ x^2y^2$ *es de grado* 4

$b.\ \ f(x,y)=x^2-y$ $\ no\ es\ homogénea\ , ya\ que\ x^2\ es\ de\ grado\ 2,\ \ y\ \ de\ grado\ 1$

■

Definición 3.6.1

La ***ecuación diferencial*** $y' = f(x,y)$ *se dice* ***homogénea*** *si la función f es homogénea de grado cero.*

En el caso que la ecuación sea dada en la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Ella será homogénea si M y N son funciones homogéneas del mismo grado n, ya que colocada en su forma normal

$$y' = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \qquad N(x,y) \neq 0$$

Resulta que el cociente es homogéneo de grado cero.

Ahora bien, si $f(x,y)$ *es homogénea de grado cero, entonces podemos escribir:*

$$y' = f(x,y) = f\left(x.1, x.\frac{y}{x}\right) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Dicha ecuación sugiere la sustitución

$$u = \frac{y}{x} \ \ o\ bien\ y = ux$$

En efecto, haciendo

$$y = ux \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u,$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada, ella se reduce a una ecuación a variables separables.

♦

Ejemplo 3.6.3

Resolver

$$(x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0$$

▲ $M(x,y) = x^2 - y^2$ *y* $N(x,y) = 3xy$ *ambas son homogéneas de grado 2*

$$(x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{3xy}$$

Si hacemos

$$y = ux \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

Entonces, sustituyendo tenemos

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{x^2(u^2 - 1)}{3x^2} = \frac{u^2 - 1}{3u}$$

Entonces

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1}{3u} - u = \frac{-1 - 2u^2}{3u}$$

Separando variables e integrando, tenemos

$$\int \left(\frac{-3u}{2u^2 + 1}\right) du = \int \left(\frac{1}{x}\right) dx \Longrightarrow -\frac{3}{4} ln(2u^2 + 1) = ln|x| + ln|c|$$

$$ln(2u^2 + 1)^{-3} = ln|cx^4| \Longrightarrow (2u^2 + 1)^{-3} = cx^4$$

Devolviendo el cambio se tiene

$$\left(2\frac{y^2}{x^2} + 1\right)^{-3} = cx^4 \Longrightarrow \left(\frac{2y^2 + x^2}{x^2}\right)^{-3} = cx^4 \Longrightarrow \frac{x^6}{(2y^2 + x^2)^3} = cx^4$$

Entonces

$$\frac{x^2}{(2y^2 + x^2)^3} = c$$

■

3.7 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación de la forma

$$y' + p(x)y = f(x) \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

Escribiendo la ecuación (1) en la forma diferencial

$$dy + [p(x)y - f(x)]dx = 0 \ \dots\dots\dots\dots (2)$$

Las ecuaciones lineales tienen la propiedad de que siempre es posible encontrar una función $\mu(x)$ *(factor integrante) tal que al multiplicar la ecuación (2)*

$$\mu(x)dy + \mu(x)[p(x)y - f(x)]dx = 0$$

Es una ecuación diferencial exacta.

Dicho factor integrante es de la forma

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (1) por este factor se obtiene

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = f(x)e^{\int p(x)dx} \quad \dots\dots\dots\dots.(3)$$

Lo cual es equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = f(x)e^{\int p(x)dx} \quad \dots\dots\dots\dots (4)$$

Esto es cierto debido a que si usamos la regla del cálculo para la diferenciación de un producto, el lado izquierdo de (4) es

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}\right) = e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + y\left(e^{\int p(x)dx}p(x)\right)$$

De (4) obtenemos por integración la solución.

$$ye^{\int p(x)dx} = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\,,$$

Es decir,

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

♦

Ejemplo 3.7.1

Resolver

$$xy' - 4y = x^6e^x$$

▲ *Escribiendo la ecuación como*

$$y' - \left(\frac{4}{x}\right)y = x^5e^x$$

el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int\frac{-4}{x}dx} = x^{-4}$$

Multiplicando la ecuación por este término

$$x^{-4}y' - 4x^{-5}y = xe^x$$

y obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x^{-4}y) = xe^x$$

Integrando ambos lados, tenemos

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + C$$

O bien

$$y = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4$$

■

3.8 Ecuaciones de Bernoulli

Una ecuación ***no lineal*** *muy conocida que se reduce a una lineal, con una sustitución adecuada, es la* ***ecuación de Bernoulli:***

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n\ ,\quad n\neq 1, n\neq 0\ \dots\dots\dots\dots(1)$$

Dividiendo la ecuación (1) por y^n*, y multiplicando por* $(1-n)$ *obtenemos*

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)p(x)y^{1-n}=(1-n)q(x)\ \dots\dots\dots\dots(2)$$

Luego si hacemos

$$z=y^{1-n}\Longrightarrow\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo en la ecuación (2) obtenemos la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)\ \dots\dots\dots\dots(3)$$

Resolviendo (3) y devolviendo el cambio de variable, tenemos que la solución general de la ecuación de Bernoulli es

$$y^{1-n}e^{\int(1-n)p(x)dx}=\int(1-n)q(x)\,e^{\int(1-n)p(x)dx}dx+C$$

♦

Ejemplo 3.8.1

Resolver

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^2$$

▲ *Para esta ecuación de Bernoulli,* $n=2$

Dividiendo la ecuación por y^2*, y multiplicando por* $(1-n)=-1$*, obtenemos*

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^{-1}=-x$$

Usando la sustitución

$$z = y^{1-n} \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

tenemos

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -x$$

Ecuación lineal en z, cuyo factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-1}{x}dx} = x^{-1}$$

Multiplicando por este factor, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(zx^{-1}) = -1 \Rightarrow zx^{-1} = -\int dx + C = -x + C \Longrightarrow z = -x^2 + Cx$$

Como $z = y^{-1}$, *se obtiene que*

$$y = \frac{1}{-x^2 + Cx}$$

■

Ejemplo 3.8.2

Un generador con una fem. de 100 voltios se conecta en serie con una resistencia de 10 ohmios y un inductor de 2 henrios. Si el interruptor s se cierra en tiempo $t=0$, *establezca una ecuación diferencial para la corriente y determine la corriente y determine la corriente en función del tiempo t.*

▲ *E = 100 voltios, L = 2 henrios, R = 10 ohm, llamando I la corriente en amperios, tenemos:*

$$2\frac{dI}{dt} + 10I = 100 \Longrightarrow \frac{dI}{dt} + 5I = 50 \;\; E.D. \, lineal \; de \; 1^{er} \; orden$$

Cuyo factor integrante es e^{5t}. *Multiplicando la ecuación por este factor tenemos*

$$e^{5t}\frac{dI}{dt} + 5e^{5t}I = 50e^{5t} \Longrightarrow \frac{d}{dt}(Ie^{5t}) = 50e^{5t} \Longrightarrow Ie^{5t} = 50\int e^{5t}dt + C$$

Entonces,

$$I(t) = 10 + Ce^{-5t}$$

Puesto que $I(0) = 0$, *entonces,* $C = -10$.

Así,

$$I(t) = 10 - 10e^{-5t}$$

■

Ejemplo 3.8.3

Una fem. decadente $E = 200e^{-5t}$ *se conecta en serie con una resistencia de 20 ohmios y un condensador de 0,01 faradios. Asumiendo que* $Q(0) = 0$, *encuentre la carga y la corriente en cualquier tiempo. Muestre que la carga alcanza un máximo, calcúlelo y halle cuando se obtiene.*

▲ *Tenemos que* $E(t) = 200e^{-5t}$, $R = 0$ *y* $C = 0{,}01 = 10^{-2}$.

Sustituyendo

$$20\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{10^{-2}} = 200e^{-5t} \Longrightarrow \frac{dQ}{dt} + 100Q = 200e^{-5t} \Longrightarrow \frac{dQ}{dt} + 5Q = 10e^{-5t}$$

E.D. lineal de 1^er^ *orden cuyo factor integrante es* e^{5t}. *De donde,*

$$e^{5t}\frac{dQ}{dt} + 5e^{5t}Q = 10 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(Qe^{5t}) = 10 \Longrightarrow Qe^{5t} = 10t + C$$

Entonces,

$$Q(t) = 10te^{-5t} + Ce^{-5t}$$

Puesto que $Q(0) = 0$ *entonces* $C = 0$.

De donde

$$Q(t) = 10te^{-5t}$$

Ahora bien, como

$$I = \frac{dQ}{dt} \Longrightarrow I = \frac{d}{dt}(10te^{-5t}) = 10e^{-5t} - 50te^{-5t}$$

Para hallar cuándo Q *es máxima, haga* $\frac{dQ}{dt} = 0$, *esto es,* $I = 0$, *es decir,*

$$10e^{-5t} - 50te^{-5t} = 0 \Longrightarrow 10e^{-5t}(1-5t) = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{5}\ seg.$$

Luego

$$Q_{máx} = 10\left(\frac{1}{5}\right)e^{-1} \approx 0{,}74\ culumbo.$$

■

3.9 Cambio de variable

Cuando una ecuación diferencial de primer orden no se puede reducir fácilmente a una de las formas estudiadas, es posible reducirlas cambiando una o ambas variables. Veamos algunos ejemplos típicos.

Ejemplo 3.9.1

Resuelva la ecuación diferencial

$$(y + xy^2)dx + (x - x^2y)dy = 0$$

▲

$$(y + xy^2)dx + (x - x^2y)dy = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y + xy^2}{x - x^2y} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y(1+xy)}{x(1-xy)}$$

Sea $u = xy$, $\quad \dfrac{du}{dx} = y + x\dfrac{dy}{dx}$, *entonces* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{du}{dx} - y\right)$.

Sustituyendo en la ecuación tenemos

$$\frac{1}{x}\left(\frac{du}{dx} - y\right) = -\frac{y(1+u)}{x(1-u)} \Longrightarrow \frac{du}{dx} - y = -\frac{y(1+u)}{1-u} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = y - \frac{y(1+u)}{1-u}$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u}{x} - \frac{u(1+u)}{x(1-u)} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}\left(1 - \frac{1+u}{1-u}\right) \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}\left(-\frac{2u}{1-u}\right)$$

Entonces, obtenemos una ecuación diferencial a variable separable

$$\left(\frac{u-1}{u^2}\right)du = \frac{2dx}{x}$$

■

Ejemplo 3.9.2

Resolver

$$\frac{dy}{dx} + x(y-x) + x^3(y-x)^2 = 1$$

▲

Sea $u = y - x$, *entonces* $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$. *Así* $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 1$

La ecuación se reduce a

$$\frac{du}{dx} + 1 + xu + x^3u^2 = 1$$

De donde obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$\frac{du}{dx} + xu + x^3u^2 = 0$$

■

Ejemplo 3.9.3

Resuelva la ecuación diferencial

$$e^{-y}\left(\frac{dy}{dx} + 1\right) = xe^x$$

▲ *Multiplicando por* e^y *en ambos miembros de la ecuación obtenemos*

$$\frac{dy}{dx} + 1 = xe^{x+y}$$

Sea $u = x + y$, *entonces* $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} + 1$. *Así* $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$

Entonces

$$\frac{du}{dx} = xe^u$$

Que separando variables e integrando tenemos

$$\frac{du}{e^u} = xdx \Longrightarrow e^{-(x+y)} = -\frac{x^2}{2} + C$$

■

Ejemplo 3.9.4

Resolver

$$2xe^{2y}\frac{dy}{dx} = 3x^4 + e^{2y}$$

▲

Sea $u = e^{2y}$, *entonces* $\frac{du}{dx} = 2e^{2y}\frac{dy}{dx}$.

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$2xe^{2y}\frac{dy}{dx} = 3x^4 + e^{2y} \Longrightarrow x\frac{du}{dx} = 3x^4 + u$$

y así obtenemos la ecuación lineal de 1er orden

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 3x^4$$

cuyo factor integrante es $\mu(x) = e^{\int -\frac{dx}{x}} = x^{-1}$. *Luego*

$$\frac{u}{x} = \int 3x^3dx = \frac{3}{4}x^4 + C \Longrightarrow u = \frac{3}{4}x^5 + Cx \Longrightarrow e^{2y} = \frac{3}{4}x^5 + Cx$$

Finalmente,

$$y = ln\sqrt{\frac{3}{4}x^5 + Cx}$$

■

Ejemplo 3.9.5

Resolver

$$6y^2dx - x(2x^3 + y)dy = 0$$

▲ *Multiplicando por* x^2 *obtenemos*

$$6y^2x^2dx - x^3(2x^3 + y)dy = 0 \Longrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x(2x^3 + y)}{6y^2} = 0$$

Sea $w = x^3$, *con lo cual* $dw = 3x^2dx$. *Sustituyendo en la ecuación, tenemos que*

$$2y^2dw - w(2w + y)dy = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dy} - \frac{w(2w + y)}{2y^2} = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dy} = \left(\frac{w}{y}\right)^2 + \frac{w}{2y}$$

Sea $z = \frac{w}{y}$, *de donde* $w = zy$ *y así* $\frac{dw}{dy} = z + y\frac{dz}{dx}$

Por lo tanto,

$$z + y\frac{dz}{dx} = z^2 + \frac{1}{2}z \Rightarrow y\frac{dz}{dx} = z^2 - \frac{1}{2}z \Rightarrow y\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - z}{2} \Rightarrow \frac{2}{z^2 - z}dz = \frac{dy}{y}$$

Entonces,

$$\frac{4dz}{2z - 1} - \frac{2dz}{z} = \frac{dy}{y} \Rightarrow 2ln|2z - 1| - 2ln|z| = ln|y| + ln|C|$$

$$\Rightarrow (2z - 1)^2 = Cyz^2$$

Como $w = zy \Rightarrow z = \frac{w}{y} = \frac{x^3}{y}$

Tenemos

$$\left(2\frac{x^3}{y} - 1\right)^2 = Cy\left(\frac{x^3}{y}\right)^2 \Longrightarrow \left(2\frac{x^3}{y} - 1\right)^2 = C\frac{x^6}{y}$$

■

3.10 Reducción a una ecuación a variable separable

Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c), \quad b \neq 0$$

Puede reducirse a una ecuación a variable separable mediante la sustitución

$$u = ax + by + c.$$

Ejemplo 3.10.1

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$$

▲ *Sea* $u = ax + by + c$

Entonces

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

Así,

$$\frac{du}{dx} - 1 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = u^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{u^2 + 1} = dx \Rightarrow arctanu = x + C$$

Devolviendo el cambio de variable, obtenemos finalmente que

$$arctan(x + y + 1) - x = C \Leftrightarrow x + y + 1 = tan(x + C)$$

$$\Leftrightarrow y = tan(x + C) - x - 1$$

■

Ejemplo 3.10.2

Resuelva la ecuación diferencial

$$y' = \frac{cos\,(x + y + 1)}{1 - cos(x + y + 1)}$$

▲ *Sea* $u = ax + by + c$

Entonces

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

Así,

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{cos\ u}{1 - cos\, u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{cos\ u}{1 - cos\, u} + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{1 - cos\, u}$$

$$\Rightarrow (1 - cos\, u)du = dx \Rightarrow u - senu = x + C$$

Luego

$$x + y + 1 - sen(x + y - 1) = x + C \Rightarrow y + 1 - sen(x + y + 1) = C$$

■

3.11 Reducción a una ecuación a homogénea

Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad b \neq 0$$

Puede reducirse a una ecuación homogénea mediante una sustitución adecuada.

El método consiste en lo siguiente:

Si se consideran las ecuaciones de las dos rectas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Para un sistema como el anterior existen tres posibilidades mutuamente excluyentes:

a. *Las rectas se intersectan en un único punto*
b. *Las rectas no se intersectan*
c. *Las rectas son iguales.*

Caso 1

Es posible hacer un cambio de variable de la forma

$$\begin{cases} u = x + a \\ v = y + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ dv = dy \end{cases}$$

donde (a, b) *son las coordenadas del punto de intersección de las rectas.*

Luego tenemos

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1(u-a) + b_1(v-b) + c_1}{a_2(u-a) + b_2(v-b) + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1' u + b_1' v}{a_2' u + b_2' v}\right)$$

♦

Ejemplo 3.11.1

Resolver

$$(4x + 3y + 1)dx(3x + 2y + 1)dy = 0$$

▲ *Consideremos*

$$\begin{cases} 4x + 3y + 1 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ahora bien, hagamos

$$\begin{cases} u = x + 1 \\ v = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ dv = dy \end{cases}$$

Así, sustituyendo, obtenemos

$$[4(u-1) + 3(v+1) + 1] + [3(u-1) + 2(v+1) + 1]\frac{dv}{du} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow [4u + 3v] + [3u + 2v]\frac{dv}{du} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{du} = -\frac{4u + 3v}{3u + 2v}$$

Sea $z = \dfrac{v}{u} \Rightarrow v = zu$

De donde

$$\frac{dv}{du} = z + u\frac{dz}{du}$$

$$z + u\frac{dz}{du} = -\frac{4u + 3zu}{3u + 2zu} = -\frac{4 + 3z}{3 + 2z} \Rightarrow u\frac{dz}{du} = \frac{-4 - 6z - 2z^2}{3 + 2z}$$

Separando variables e integrando, tenemos

$$\frac{(3 + 2z)dz}{4 + 6z + 2z^2} = -\frac{du}{u} \Rightarrow \frac{1}{2}ln|4 + 6z + 2z^2| = -ln|u| - ln|C|$$

$$\Rightarrow 4 + 6z + 2z^2 = (Cu)^{-2} \Rightarrow 4 + 6\frac{v}{u} + 2\left(\frac{v}{u}\right)^2 = \frac{B}{u^2}$$

$$\Rightarrow 4 + 6\left(\frac{y + 1}{x + 1}\right) + 2\left(\frac{y - 1}{x + 1}\right)^2 = \frac{B}{(x + 1)^2}$$

■

Caso 2

Ahora estudiaremos el caso en que las rectas son paralelas.

Como las rectas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Son paralelas, tenemos que

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \lambda \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda a_2 \\ b_1 = \lambda b_2 \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda a_2x + \lambda b_2y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Sea $z = a_2x + b_2y$, *entonces*

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right)$$

Luego sustituyendo, obtenemos

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right) = f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right)$$

♦

Ejemplo 3.11.2

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{2x + 2y + 2}$$

▲ *Vemos que las rectas son paralelas.*

$Sea\ z = x + y, entonces\ \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}, luego\ \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

Así,

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z - 3}{2z + 2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{3z - 1}{2z + 2} \Rightarrow \left(\frac{2z + 2}{3z - 1}\right)dz = dx$$

$$\Rightarrow x + C = \frac{2}{3}\int dz + \frac{8}{3}\int \frac{dz}{3z - 1}$$

$$\Rightarrow x + C = \frac{2}{3}z + \frac{8}{9}ln|3z - 1|$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}(x + y) + \frac{8}{9}ln|3(x + y) - 1| + C$$

■

3.12 Reducción de orden

Es muy frecuente, en las ecuaciones diferenciales poder reducir de orden a objeto de obtener una ecuación diferencial de más fácil solución. Estudiaremos como resolver una ecuación diferencial de la forma

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Veamos los siguientes casos:

Caso 1

En la ecuación diferencial falta y, es decir, la ecuación tiene la forma $F(x, y', y'') = 0$, *la cual resolveremos con el cambio* $y' = u$, *para obtener*

$$F(x, u, u') = 0$$

Ejemplo 3.12.1

Resolver la EDO $x^2 y'' + (y')^2 = 0$

▲ *Sea* $u = y'$. *Entonces* $u' = y''$ *sustituyendo en la ecuación tenemos*

$$x^2 u' + u^2 = 0 \Longrightarrow u' + \frac{1}{x^2} u^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} u^2$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{u} = \frac{1}{x} + C_1$$

$$\Longrightarrow u = -\frac{x}{1 + C_1 x}$$

De donde nos queda la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{x}{1 + C_1 x} \Longrightarrow y' = \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_1(1 + C_1 x)}$$

Entonces

$$y = \frac{x}{C_1} - \frac{ln|1 + C_1 x|}{C_1^2} + C_2$$

■

Caso 2

En la ecuación diferencial falta x, es decir, la ecuación tiene la forma $F(y, y', y'') = 0$.

Haciendo el cambio $y' = z$ *y observando que*

$$y'' = z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z\,,$$

Tenemos que la ecuación se transforma en

$$G\left(y, z, \frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

♦

Ejemplo 3.12.2

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial $y^2 y'' = y'$.

▲ *En este caso falta la x, y tenemos que hacer el cambio de variable,*

$$y' = z, \qquad y'' = z\frac{dz}{dy}$$

Con lo cual obtenemos

$$y^2 z \frac{dz}{dy} = z$$

Si y es constante, entonces $z = 0$ *y ambos miembros de la ecuación se anulan, con lo cual* $y = C$ *es solución de la ecuación. En caso contrario,* $z \neq 0$, *y podemos dividir por z para obtener*

$$y^2\frac{dz}{dy} = 1 \Rightarrow dz = \frac{dy}{y^2} \Rightarrow z = -\frac{1}{y} + C$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{Cy - 1}{y} \Rightarrow \frac{y}{Cy - 1}dy = dx$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C(Cy - 1)}\right)dy = \int dx$$

$$\Longrightarrow \frac{y}{C} + \frac{ln(Cy-1)}{C^2} = x + C_2$$

De donde obtenemos la solución:

$$Cy + ln(Cy-1) = C^2x + C_3.$$

■

Ejemplo 3.12.3

Resuelva la ecuación diferencial $yy'' = (y')^2(1 - y'cosy + yy'seny)$

▲ *En esta ecuación no aparece la variable x, de modo que hacemos el cambio de variable*

$$y' = z, \qquad y'' = z\frac{dz}{dy}$$

y obtenemos

$$yz\frac{dz}{dy}' = z^2(1 - zcosy + yzseny)$$

Si y es constante, entonces $z = 0$ *y ambos miembros de la ecuación se anulan, con lo cual* $y = C$ *es solución de la ecuación. En caso contrario,* $z \neq 0$*, y podemos dividir por z para obtener*

$$y\frac{dz}{dy} = z(1 - zcosy + yzseny) \Longrightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} - z^2\frac{cosy}{y} + z^2seny$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = z^2\left(seny - \frac{cosy}{y}\right)$$

Esta es una ecuación de Bernoulli. Dividiendo por z^2 *tenemos*

$$z^{-2}\frac{dz}{dy} - \frac{z^{-1}}{y} = \left(seny - \frac{cosy}{y}\right)$$

Haciendo $u = z^{-1}$*, tenemos que* $u' = -z^{-2}z'$*, obtenemos*

$$u' + \frac{u}{y} = \frac{cosy}{y} - seny$$

Ecuación lineal de 1er orden, cuyo factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{dy}{y}} = |y|$$

Obtenemos la solución

$$u = \frac{1}{y}\left(\int (cosy - yseny)dy + C\right)$$

de donde

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{y}\left(\int (cosy - yseny)dy + C\right) \Longrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{y}(ycosy + C) \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}(ycosy + C)$$

$$\Longrightarrow x = Cln|y| + seny + C_2$$

■

Parte IV

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Capítulo 4

4.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Un sistema de ecuaciones lineales de primer orden (SEDL) tiene la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

donde a_{ij}, g_i *y* x_i *son funciones a variables reales, con dominio en un intervalo I.*

Si $g_1, g_2, \dots, g_n$ *son funciones iguales a cero, el sistema se llama* ***homogéneo****; de otro modo es* ***no homogéneo.***

El sistema de ecuaciones diferenciales lineales se puede escribir en forma matricial:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{G}$$

Si es homogéneo, entonces

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

donde

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{G} = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

♦

Definición 4.1.1

Una solución de un SEDL es un conjunto de n funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$, *derivables, tales que*

$$\frac{df_1}{dt} = a_{11}(t)f_1 + a_{12}(t)f_2 + \cdots + a_{1n}(t)f_n + g_1(t)$$
$$\frac{df_2}{dt} = a_{21}(t)f_1 + a_{22}(t)f_2 + \cdots + a_{2n}(t)f_n + g_2(t)$$
$$\vdots$$
$$\frac{df_n}{dt} = a_{n1}(t)f_1 + a_{n2}(t)f_2 + \cdots + a_{nn}(t)f_n + g_n(t)$$

Para todo t perteneciente a algún $J \subseteq I$.

♦

Ejemplo 4.1.1

Compruebe que los vectores

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}\ ;\ \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$$

Son solución del SEDL

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

▲ *Como*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{d\vec{x}_1}{dt} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Además

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Entonces

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{x}_1}{dt}.$$

Por otro lado,

$$\frac{d\vec{x}_2}{dt} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 230 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 230 \end{pmatrix} = \frac{d\vec{x}_2}{dt}$$

■

4.2 Principio de Superposición

Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ *un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo en un intervalo I*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Entonces, la combinación lineal

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n$$

donde los $c_i, i = 1,2, \dots, n$, *son constantes arbitrarias, también es solución en el intervalo I*

♦

Ejemplo 4.2.1

Una solución del sistema

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}(t)$$

esta dada por la función vectorial

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} cost \\ -\frac{1}{2}cost + \frac{1}{2}sent \\ -cost - sent \end{pmatrix}.$$

Entonces, para cualquier constante c_1, *el vector* $\vec{x} = c_1\vec{x}_1$, *también es solución, ya que*

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -c_1 sent \\ \frac{c_1}{2}sent + \frac{c_1}{2}cost \\ c_1 sent - c_1 cost \end{pmatrix}$$

y

$$A\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 cost \\ -\frac{c_1}{2} cost + \frac{c_1}{2} sent \\ -c_1 cost - c_1 sent \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 sent \\ \frac{c_1}{2} sent + \frac{c_1}{2} cost \\ c_1 sent - c_1 cost \end{pmatrix}$$

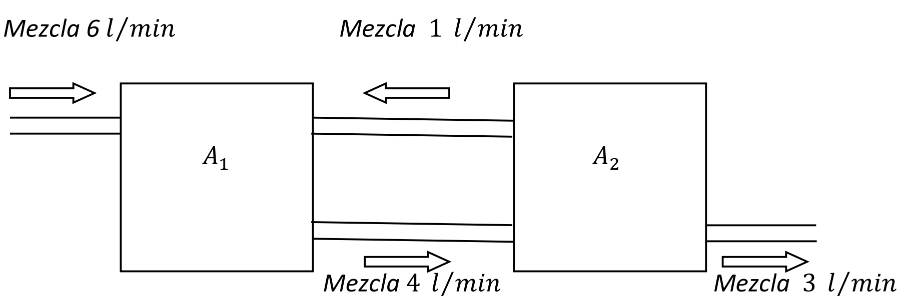
■

4.3 Algunos problemas que conducen a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

4.3.1 Mezcla

Se tienen dos tanques A_1 y A_2. El tanque A_1 tiene 60 litros de una solución de agua y sal, que contiene 25 gramos de sal disueltos, y el tanque A_2 tiene 60 litros de agua pura. En el tanque A_1 entra una solución, que contiene 2 gramos de sal por litro, a una velocidad de $6\ l/min$. Del A_1 a A_2 pasa mezcla a una velocidad de $4\ l/min$, y del A_2 a A_1 pasa mezcla a una velocidad de $1\ l/min$. Además del tanque A_2 sale mezcla al exterior a una velocidad de $3\ l/min$. Hallar la cantidad de sal en A_1 y A_2 en cada instante t, suponiendo que la solución se mantiene homogéneamente mezclada durante el proceso.

▲



Sea $x_i(t)$ la cantidad (en gramos) de sal en el tanque A_i después de t minutos de haber comenzado a bombear. Entonces la rapidez de cambio de la cantidad de sal en el tanque A_i es

$$x'(t) = \begin{pmatrix} \textit{rapidez con que} \\ \textit{entra la sal en el} \\ \textit{tanque } A_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \textit{rapidez con que} \\ \textit{sale la sal del} \\ \textit{tanque } A_i \end{pmatrix}, i = 1{,}2$$

Nótese que si bien la cantidad de solución permanece constante en el tanque A_2 *, en el tanque* A_1 *se acumula líquido con rapidez de* $(6-4)\, l/min = 2\, l/min$ *. Por lo tanto, después de* t *minutos hay* $(60+t)$ *litros de solución en el tanque* A_1*. De este modo se deduce que*

$$\begin{cases} x_1'(t) = \left[(2g/l)(6l/min) + \left(\dfrac{x_2(t)}{60}\, g/l\right)(1l/min)\right] - \left[\left(\dfrac{x_1(t)}{60+2t}\, g/l\right)(4l/min)\right] \\ x_2'(t) = \left[\left(\dfrac{x_1(t)}{60+2t}\, g/l\right)(4l/min)\right] - \left[\left(\dfrac{x_2(t)}{60}\, g/l\right)(1l/min) + \left(\dfrac{x_2(t)}{60}\, g/l\right)(3l/min)\right] \end{cases}$$

O sea,

$$\begin{cases} x_1' = -\dfrac{2}{30+t}x_1 + \dfrac{1}{60}x_2 + 12 \\ x_2' = \dfrac{2}{30+t}x_1 - \dfrac{1}{15}x_2 \end{cases}$$

Escrito en forma matricial resulta

$$\vec{X}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{30+t} & \dfrac{1}{60} \\ \dfrac{2}{30+t} & -\dfrac{1}{15} \end{pmatrix}}_{A(t)} \vec{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{G}(t)} \quad , \quad t \geq 0$$

Entonces, resolviendo el problema de valor inicial

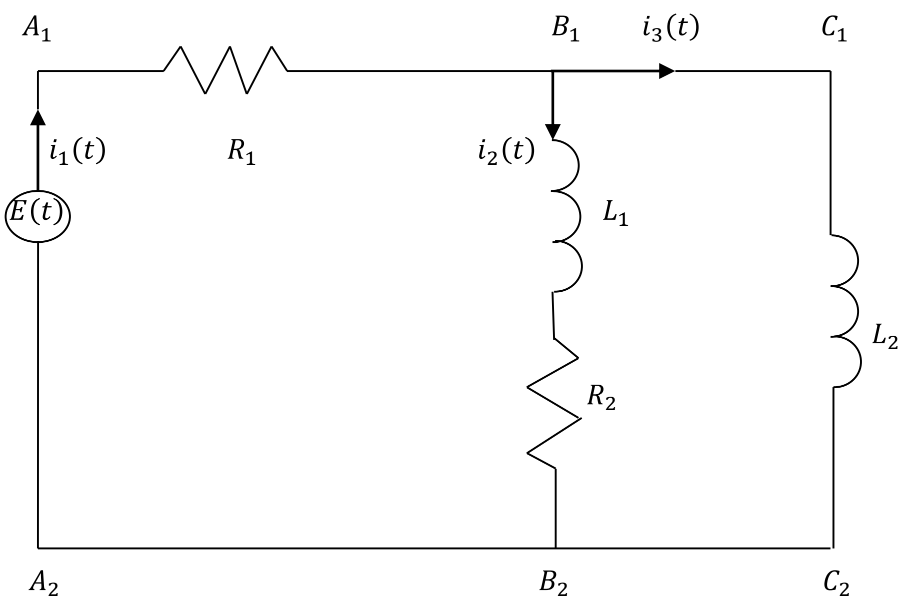
$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}\,, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se obtendrá $\vec{X}(t)$.

■

4.3.2 Redes eléctricas.

Considere la red eléctrica de la figura.



Sean $i_1(t)$ *la corriente que circula por la rama* $B_2A_2A_1B_1$,

$i_2(t)$ *la corriente que circula por* B_1B_2,

$i_3(t)$ *la corriente que circula por* $B_1C_1C_2B_2$,,

Hallar $i_k(t)$, $k = 1,2,3$, *en cada instante t.*

▲

En cada malla de la red eléctrica se puede aplicar la segunda ley de Kirchhoff y entonces se tiene que la suma de las caídas de voltaje a través de cada uno de los componentes de cada malla considerada a continuación es igual al voltaje $E(t)$: *para la malla* $A_1B_1B_2A_2A_1$ *se tiene*

$$i_1R_1 + L_1\frac{di_2}{dt} + i_2R_2 = E(t)$$

Mientras que para la malla $A_1B_1B_2C_1C_2B_2A_2A_1$ *resulta*

$$i_1R_1 + L_2\frac{di_3}{dt} = E(t)$$

Pero por la primera ley de Kirchhoff se sabe que

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$

Por lo que las ecuaciones diferenciales obtenidas anteriormente pueden ser reescritas como sigue:

$$\begin{cases} L_1\dfrac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 + +R_1i_3 = E(t) \\ \\ L_1\dfrac{di_3}{dt} + \qquad R_1i_2 + +R_1i_3 = E(t) \end{cases}$$

Y si se dan las condiciones iniciales naturales $i_2(0) = 0 = i_3(0)$ *, todo se reduce a resolver un problema de valores iniciales.*

■

4.4 Teorema de existencia y unicidad

Si $\vec{A}(t)$ y $\vec{G}(t)$ son funciones continuas en un cierto intervalo abierto I que contiene a t_0, entonces existe una única solución $\vec{Y}(t)$ definida en I, del problema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{G}; \quad \vec{x}(t_0) = B$$

♦

Definición 4.4.1

*Un conjunto de vectores $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ de un espacio vectorial V, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C})$ se dice **linealmente independiente** (LI), si*

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = 0 \quad con\ c_i \epsilon \mathbb{K},$$

*Entonces $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Si no es linealmente independiente se dice **linealmente dependiente.***

♦

Ejemplo 4.4.1

Determine si los vectores $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ son linealmente independiente o no

▲ *Para ello, sean c_1, c_2, c_3 escalares tales que $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3 = 0$, es decir,*

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 0 \end{cases}$$

Ahora bien,

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 0 - 9 - 6 - 0 + 5 = 0$$

Entonces el sistema tiene solución no trivial, es decir

$$\begin{cases} c_1 = 2c_2 \\ c_2 = -c_3 \\ c_3 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por lo tanto los vectores dados son linealmente dependientes.

■

4.4.1 Teorema

Sean $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ *soluciones del sistema homogéneo*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

Siendo $A = A(t)$ *una matriz de* $n \times n$, *continua en un intervalo abierto* I *y* V_A *el espacio de las soluciones del sistema. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a. *El conjunto* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ *es linealmente dependiente en* V_A
b. *Para cada* t_0 *en I,* $\{\vec{x}_1(t_0), \vec{x}_2(t_0), \dots, \vec{x}_n(t_0)\}$ *es linealmente dependiente en* $\mathbb{R}^n$.
c. *Existe* t_0 *en I,* $\{\vec{x}_1(t_0), \vec{x}_2(t_0), \dots, \vec{x}_n(t_0)\}$ *es linealmente dependiente en* $\mathbb{R}^n$.

Demostración:

$a. \Longrightarrow b.$ *Existen* $c_1, c_2, \dots, c_n$ *en* $\mathbb{R}$ *, no todos nulos, tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0.$$

Entonces, para cualquier t_0 *en I se cumple que*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\,(t_0) = 0 \; en \; \mathbb{R}^{\mathrm{n}}.$$

Así, $\{\vec{x}_1(t_0), \vec{x}_2(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)\}$ *es linealmente dependiente en* $\mathbb{R}^n$.

$b. \Longrightarrow c.$ *Es inmediato.*

$c. \Longrightarrow a.$ *Por hipótesis, existen* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *en* $\mathbb{R}$ *, no todos nulos, tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\,(t_0) = 0.$$

En otras palabras, la función

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Es solución del problema a valores iniciales

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad \vec{x}(t_0) = 0.$$

Como $\vec{x} \equiv \vec{0}$ *también es una solución de dicho problema, en virtud de la unicidad de la solución debemos tener que*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0,$$

Como función sobre I.

♦

4.4.1 Corolario

Sean $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ *soluciones del sistema homogéneo*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

Siendo $A = A(t)$ *una matriz de* $n \times n$*, continua en un intervalo abierto* I *y* V_A *el espacio de las soluciones del sistema. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a. *El conjunto* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ *es linealmente independiente en* V_A

b. *Para cada* t_0 *en I,* $\{\vec{x}_1(t_0), \vec{x}_2(t_0), \dots, \vec{x}_n(t_0)\}$ *es linealmente independiente en* $\mathbb{R}^n$.

c. *Existe* t_0 *en I,* $\{\vec{x}_1(t_0), \vec{x}_2(t_0), \dots, \vec{x}_n(t_0)\}$ *es linealmente independiente en* $\mathbb{R}^n$.

♦

Definición 4.4.2

Sea $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ *un conjunto de vectores linealmente independiente solución del sistema homogéneo*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

en un intervalo I. Entonces diremos que $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ *es un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo I.*

♦

Definición 4.4.3

Sea $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ *un conjunto fundamental de soluciones del sistema*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

en el intervalo I. La solución general del sistema se define como

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n \quad con \;\; c_i \epsilon \mathbb{R}, para\ i = 1,2, \dots n$$

♦

Definición 4.4.4

Sea $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ *un conjunto fundamental de soluciones, si se denota* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ *a la matriz cuya columna i-ésima es* $\vec{x}_i$*, entonces se define el* ***Wronskiano*** *de las de las n soluciones* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ *como*

$$W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = det(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$$

♦

Observe que $W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ *es una función a valores reales definida para todo I.*

4.4.2 Teorema

Sea $A = A(t)$ *una matriz de* $n \times n$*, continua en un intervalo* I *y sean* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ *pertenecientes a* V_A*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

a. *El conjunto* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ *es linealmente independiente en* V_A
b. *Para cada* t_0 *en I,* $W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)(t_0) \neq 0.$
c. *Existe* t_0 *en I,* $W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)(t_0) \neq 0.$

♦

Ejemplo 4.4.2

Verificar que los vectores

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ -e^{3t} \end{pmatrix} \ y \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ -2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}$$

Forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

▲ *Se puede verificar que cada uno de los vectores dados son solución del sistema. Para establecer que es un conjunto fundamental es necesario demostrar que son linealmente independientes. Para ello calculemos el Wronskiano de las soluciones*

$$W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \begin{vmatrix} 2e^t & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 2e^t & 0 & -2e^{5t} \\ e^t & -e^{3t} & e^{5t} \end{vmatrix} = -16e^{9t} \neq 0$$

Lo cual nos dice que los vectores son linealmente independientes.

■

Ejemplo 4.4.3

Verificar que los vectores

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} \; y \; \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\cos t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$$

Forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$$

▲ *Se tiene que*

$$W(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \begin{vmatrix} \cos t & 0 & \operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t & e^t & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\cos t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t & 0 & -\operatorname{sen} t + \cos t \end{vmatrix} =$$

$$= e^t \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t + \cos t \end{vmatrix}$$

$$= e^t[(-\cos t \operatorname{sen} t + \cos^2 t) - (-\cos t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t)] = e^t \neq 0$$

Entonces, los vectores dados forman un conjunto fundamental de soluciones. La solución general es

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3$$

■

Ejemplo 4.4.4

Dada las funciones

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix}$$

a. *¿Pueden estas funciones formar un conjunto fundamental de soluciones para un sistema lineal homogéneo*

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y},$$

con $A(t)$ continua sobre un intervalo abierto? Si su respuesta es afirmativa, indique cuál es dicho intervalo.

b. *Halle $A(t)$.*

▲

a. Como

$$W(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & e^t \end{vmatrix} = e^{2t} - 1$$

es distinto de cero si y sólo si $e^t \neq 1, para\ t \neq 0$.

Por lo tanto las funciones dadas forman un conjunto de soluciones en todo $\mathbb{R} - \{0\}$ y podemos elegir el intervalo igual a $(0, \infty)$ ó $(-\infty, 0)$.

b. *Sea $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Sustituyendo $\vec{y}_1$ en el sistema*

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$$

Obtenemos

$$\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{cases} e^t = a_{11}e^t + a_{12}e^t \\ \\ e^t = a_{21}e^t + a_{22}e^t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{12} = 1 \\ \\ a_{21} + a_{22} = 1 \end{cases}$$

Por otra parte, Sustituyendo $\vec{y}_2$ en el sistema

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$$

Obtenemos

$$\begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{cases} -e^{-t} = a_{11}e^{-t} + a_{12}e^{t} \\ \\ e^{t} = a_{21}e^{-t} + a_{22}e^{t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{12}e^{2t} = -1 \\ \\ a_{21} + a_{22}e^{2t} = e^{2t} \end{cases}$$

Ahora bien,

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} = 1 \\ \\ a_{11} + a_{12}e^{2t} = -1 \end{cases} \Longrightarrow (e^{2t} - 1)a_{12} = -2 \Longrightarrow a_{12} = \frac{-2}{e^{2t} - 1}, \qquad x \neq 0$$

Luego,

$$a_{11} = 1 - a_{12} = \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1}$$

De forma análoga, se obtiene

$$\begin{cases} a_{21} + a_{22} = 1 \\ \\ a_{21} + a_{22}e^{2t} = e^{2t} \end{cases} \Longrightarrow (e^{2t} - 1)a_{22} = e^{2t} - 1 \Longrightarrow a_{22} = 1, \qquad x \neq 0$$

Luego,

$$a_{11} = 0$$

Por lo tanto,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} & \dfrac{-2}{e^{2t} - 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Ejemplo 4.4.5

Halle el conjunto fundamental de soluciones del sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1/t & 0 \\ 1 & -t \end{pmatrix}\vec{x}$$

▲ *Sustituyendo* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$*en la ecuación*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t & 0 \\ 1 & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{t} \\ x_1 - tx_2 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{t}$$

y

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - tx_2$$

Podemos resolver la primera de estas ecuaciones, ya que es una ecuación diferencial ordinaria de 1er orden:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{t} \Longrightarrow \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dt}{t} \Longrightarrow x_1 = C_1 t$$

Ahora bien, sustituyendo este resultado en la segunda ecuación, se tiene que

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - tx_2 = C_1 t - tx_2 \Longrightarrow \frac{dx_2}{dt} = (C_1 - x_2)t \Longrightarrow \frac{dx_2}{C_1 - x_2} = tdt$$

$$\Longrightarrow -ln|C_1 - x_2| = \frac{t^2}{2} + K_2 \Longrightarrow C_1 - x_2 = B_2 e^{-t^2/2}$$

$$\Longrightarrow x_2 = C_1 + C_2 e^{-t^2/2}$$

Por lo tanto,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 t \\ C_1 + C_2 e^{-t^2/2} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t^2/2} \end{pmatrix}$$

Observemos que

$$W\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t^2/2} \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & e^{-t^2/2} \end{vmatrix} = te^{-t^2/2} \neq 0, \qquad si \ \ t \neq 0$$

Por lo tanto, $\left\{\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t^2/2} \end{pmatrix}\right\}$ *son linealmente independientes y forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación dada.*

■

4.5 Resolución de sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

4.5.1 Valores propios y vectores propios

Supongamos que $\vec{x} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K} e^{\lambda t}$ *es un vector solución del sistema*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K} e^{\lambda t}\right) = A\vec{K} e^{\lambda t} \Longrightarrow \lambda \vec{K} e^{\lambda t} = A\vec{K} e^{\lambda t} \Longrightarrow \lambda \vec{K} = A\vec{K} \Longrightarrow (A - \lambda I)\vec{K} = 0$$

Lo cual es equivalente a

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)K_1 + a_{12}K_2 + \cdots + a_{1n}K_n = 0 \\ a_{21}K_1 + (a_{22}-\lambda)K_2 + \cdots + a_{2n}K_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots\ddots\vdots \\ a_{n1}K_1 + a_{n2}K_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)K_n = 0 \end{cases}$$

Recordemos que, un sistema homogéneo tiene solución no trivial si el determinante de la matriz asociada al sistema es igual a cero, es decir,

$$det(A-\lambda I) = 0.$$

Los valores que satisfacen esta última ecuación llamada ***ecuación característica de A,*** *son llamados* ***valores propios o autovalores.*** *Un vector solución* $\vec{K}$ *correspondiente a un valor* λ *es llamado* ***vector propio o autovector.***

♦

4.5.1.1 Valores propios reales y distintos

Cuando la matriz $A_{n\times n}$ *posee n valores propios y distintos* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *siempre se puede encontrar un conjunto de n vectores propios linealmente independientes* $\vec{K}_1, \vec{K}_2, \ldots, \vec{K}_n$ *y*

$$\vec{x}_1 = \vec{K}_1 e^{\lambda_1 t},\ \ \vec{x}_2 = \vec{K}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \vec{x}_n = \vec{K}_n e^{\lambda_n t}$$

es un conjunto fundamental de soluciones del sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

en $(-\infty, \infty)$

♦

4.5.1.1.1 Teorema

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ valores propios distintos de la matriz A de los coeficientes del sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

y sean $\vec{K}_1, \vec{K}_2, \dots, \vec{K}_n$ los correspondientes vectores propios. Entonces, la solución general del sistema homogéneo está dada por

$$\vec{x} = c_1\vec{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{K}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\vec{K}_n e^{\lambda_n t}.$$

♦

Ejemplo 4.5.1.1

Resolver

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\vec{x}$$

▲ *Determinemos los valores propios y vectores propios de la matriz de coeficientes.*

De la ecuación característica

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

Luego los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$

Veamos cuales son los vectores propios asociados a cada valor propio.

Para $\lambda_1 = 1$, el vector propio $\vec{K}_1 = \binom{x_1}{y_1}$ satisface

$$(A - \lambda_1 I)\vec{K}_1 = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}\binom{x_1}{y_1} = \binom{0}{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\binom{x_1}{y_1} = \binom{0}{0}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que $x_1 = y_1$, de donde

$$\vec{K}_1 = \binom{x_1}{y_1} = \binom{x_1}{x_1} = \binom{1}{1}x_1.$$

De forma análoga, para $\lambda_2 = 2$, *el vector propio* $\vec{K}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *satisface*

$$(A - \lambda_2 I)\vec{K}_2 = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ -2 & 3 - \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que $2x_2 = y_2$, *de donde*

$$\vec{K}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_2.$$

Luego las soluciones del sistema dado están generadas por las soluciones particulares

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \; ; \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} c_1e^t + c_2e^{2t} \\ c_1e^t + 2c_2e^{2t} \end{pmatrix}$$

■

Ejemplo 4.5.1.2

Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -4x_1 + x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \quad x_1 + 5x_2 - x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \quad x_2 - 3x_3 \end{cases} \quad ; \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▲ *Calculemos los autovalores*

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5) = 0$$

Luego los valores propios son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ *y* $\lambda_3 = 5$

Para $\lambda_1 = -3$, *el vector propio* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *satisface*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

usando el método de Gauss-Jordan, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, $x_1 = x_3$ *y* $x_2 = 0$, *de donde*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Para $\lambda_2 = -4$, *el vector propio* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *satisface*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

usando el método de Gauss-Jordan, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, $x_1 = 10x_3$ *y* $x_2 = -x_3$, *de donde*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Por último, cuando $\lambda_3 = 5$, *las matrices aumentadas*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, $x_1 = x_3$ *y* $x_2 = 8x_3$, *de donde*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_3 \\ 8x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Se concluye que la solución general del sistema es

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Usando la condición inicial $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *obtenemos*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos finalmente que

$$c_1 = -\frac{1}{8}, \qquad c_2 = \frac{1}{9} \quad y \quad c_3 = \frac{1}{72}$$

Por lo tanto, la solución del problema a valores iniciales está dada por

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ 0 \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} e^{-4t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{72} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{72} \end{pmatrix} e^{5t}$$

■

4.5.1.2 Valores propios reales repetidos

Por supuesto, no todos los n valores propios de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *de una matriz* $A_{n\times n}$ *deben ser distintos, es decir, algunos de los valores propios podrían ser repetidos. Por ejemplo, se demuestra con facilidad que la ecuación característica de la matriz de coeficientes en el sistema*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Se obtiene con facilidad que

$$(\lambda + 3)^2 = 0$$

y por lo tanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ *es una raíz de multiplicidad dos. Para este valor se encuentra el vector propio único*

$$\vec{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ de modo que } \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Es solución del sistema. Pero como es obvio que se está interesado en formar la solución general del sistema, y para ello se necesita encontrar una segunda solución.

En general, si m es un entero positivo y $(\lambda - \lambda_1)^m$ *es un factor de la ecuación característica, mientras que* $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ *no es u factor, entonces se dice que* λ_1 *es un* ***valor propio de multiplicidad m****. En los tres ejemplos que se dan a continuación se ilustran los casos siguientes:*

i. *Para algunas matrices* $A_{n\times n}$ *podría ser posible encontrar m vectores propios linealmente independientes* $\vec{K}_1, \vec{K}_2, \dots, \vec{K}_m$ *que corresponden a un valor propio* λ_1 *de multiplicidad* $m \le n$. *En este caso, la solución general del sistema contiene la combinación lineal.*

$$c_1\vec{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{K}_2 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_m\vec{K}_m e^{\lambda_1 t}.$$

ii. *Si sólo hay un vector propio que corresponde al valor propio* λ_1 *de multiplicidad m, entonces siempre se puede encontrar m soluciones linealmente independientes de la forma*

$$\vec{x}_1 = \vec{K}_{11} e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{x}_2 = \vec{K}_{21} t e^{\lambda_1 t} + \vec{K}_{22} e^{\lambda_1 t}$$

$\vdots$

$$\vec{x}_m = \vec{K}_{m1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t} + \vec{K}_{m2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_1 t} + \cdots + \vec{K}_{mm}e^{\lambda_1 t}$$

donde $\vec{K}_{ij}$ *son vectores columnas.*

♦

I. Valores propios de multiplicidad dos

Comencemos por considerar valores de multiplicidad dos.

Ejemplo 4.5.1.2.1

Resuelva

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$$

▲ *Al desarrollar el determinante en la ecuación característica*

$$det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Se obtiene $-(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$. *Se ve que* $\lambda_1=\lambda_2=-1$ *y* $\lambda_3=5$.

Para $\lambda_1=-1$, *el vector propio* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *satisface*

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con la eliminación de Gauss-Jordan se obtiene de inmediato

$$(A+I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La primera fila indica que $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, *o bien,* $x_1 = x_2 - x_3$. *Tomando* $x_2 = 1,\ x_3 = 0$, $x_2 = 1,\ x_3 = 1$ *producen, a su vez* $x_1 = 1$ *y* $x_1 = 0$. *Así que dos vectores propios que corresponde a* $\lambda_1 = -1$ *son*

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \ y \ \vec{k}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Puesto que ningún vector propio es un múltiplo constante del otro, se han encontrado dos soluciones linealmente independientes,

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{-t} \ y \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-t}$$

Que corresponden al mismo valor propio. Por último para $\lambda_3 = 5$, *tenemos*

$$(A + I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c}-4 & -2 & 2 & 0\\-2 & -4 & -2 & 0\\2 & -2 & -4 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Luego, $x_1 = x_2$ *y* $x_2 = -x_3$. *Al seleccionar* $x_3 = 1$, *se obtiene* $x_1 = 1,\ x_2 = -1$; *así que el tercer vector propio es*

$$\vec{k}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es

$$\vec{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{-t} + c_2 t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}e^{5t}$$

Segunda solución

Suponga que λ_1 *es un valor propio de multiplicidad dos y que sólo hay un vector propio relacionado con este valor. Se puede encontrar una segunda solución de la forma*

$$\vec{x}_2 = \vec{K}te^{\lambda_1 t} + \vec{P}e^{\lambda_1 t}$$

donde $\vec{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ y $\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$

Para ver esto, sustituimos en el sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

Y simplificando

$$\left(A\vec{k} - \lambda_1\vec{k}\right)te^{\lambda_1 t} + \left(A\vec{P} - \lambda_1\vec{P} - \vec{k}\right)e^{\lambda_1 t} = \vec{0}$$

Puesto que esta última ecuación se cumple para los valores de t, se debe tener

$$(A - \lambda_1 I)\vec{k} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{P} = \vec{k} \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

La ecuación (1) simplemente expresa que $\vec{k}$ debe ser un vector característico de A asociado con λ_1. Al resolver (1), se encuentra una solución $\vec{x}_1 = \vec{k}e^{\lambda_1 t}$. Para hallar la segunda solución $\vec{x}_2$, sólo se necesita resolver el sistema adicional (2) para obtener el vector $\vec{P}$.

♦

Ejemplo 4.5.1.2.2

Resuelva

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}\vec{x}$$

▲ *Se obtiene con facilidad que $(\lambda + 3)^2 = 0$ y, por tanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ es una raíz de multiplicidad dos. Para este valor se encuentra el vector propio único $\vec{K} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y cuya solución es $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$.*

Ahora bien, tenemos el sistema donde $\vec{K} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$$\left(A\vec{P} + 3\vec{P}\right) = \vec{k} \Longrightarrow \begin{cases} 6p_1 - 18p_2 = 3 \\ 2p_1 - 6p_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow p_1 = \frac{1 - 6p_2}{2}$$

Al elegir $p_1 = \frac{1}{2}$ *se encuentra que* $p_2 = 0$. *Por consiguiente* $\vec{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. *Así se encuentra que*

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

entonces, la solución general es

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right]$$

■

II. Valores propios de multiplicidad tres

Cuando la matriz de coeficientes A tiene sólo un vector propio relacionado con un vector propio λ_1 *de multiplicidad tres, se puede encontrar una segunda solución de la forma*

$$\vec{x}_2 = \vec{K}te^{\lambda_1 t} + \vec{P}e^{\lambda_1 t}$$

Y una tercera solución de la forma

$$\vec{x}_3 = \vec{K}\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + \vec{P}te^{\lambda_1 t} + \vec{Q}e^{\lambda_1 t}$$

donde $\vec{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$, $\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ *y* $\vec{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$

Al sustituir en el sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

Se encuentra que los vectores $\vec{K}, \vec{P}$ *y* $\vec{Q}$ *deben satisfacer*

$$(A-\lambda_1 I)\vec{k}=0 \qquad \dots\dots\dots(3)$$

$$(A-\lambda_1 I)\vec{P}=\vec{k} \qquad \dots\dots\dots(4)$$

$$(A-\lambda_1 I)\vec{Q}=\vec{P} \qquad \dots\dots\dots(5)$$

Las soluciones (3) y (4) se pueden usar para formar las soluciones $\vec{x}_1$ *y* $\vec{x}_2$*.*

♦

Ejemplo 4.5.1.2.3

Resuelva

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}2&1&6\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}\vec{x}$$

▲ *La ecuación característica* $(\lambda-2)^3=0$ *muestra que* $\lambda_1=2$ *es un valor propio de multiplicidad tres. Al resolver* $(A-\lambda_1)\vec{k}=0$*, se encuentra el único vector propio*

$$\vec{K}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

A continuación se resuelve los sistemas $(A-\lambda_1)\vec{P}=\vec{k}$ *y* $(A-\lambda_1)\vec{Q}=\vec{P}$ *en sucesión y se encuentra que*

$$\vec{P}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad y \qquad \vec{Q}=\begin{pmatrix}0\\-6/5\\1/5\end{pmatrix}$$

Luego la solución general del sistema es

$$\vec{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}te^{2t}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t}\right]+c_3\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}te^{2t}+\begin{pmatrix}0\\-6/5\\1/5\end{pmatrix}e^{2t}\right]$$

■

Observación

Cuando un valor propio λ_1 *tiene multiplicidad m, se pueden determinar m vectores propios linealmente independientes o el número de vectores correspondientes es menor que m. Por lo tanto, los dos casos dados anteriormente no son todas las posibilidades en las que puede ocurrir un valor propio repetido. Puede suceder, por ejemplo que una matriz* 5×5 *tenga un valor propio de multiplicidad cinco y existan tres vectores propios correspondientes linealmente independientes.*

♦

4.6 Repaso de números complejos

Recuerde que los números complejos se representan por expresiones de la forma $z = a + bi$*, donde a y b son números reales, e* $i = \sqrt{-1}$*, es decir,* $i^2 = 1$*.*

La ***parte real*** $Re(z) = a$*, y su* ***parte imaginaria*** $Im(z) = b$

La ***suma*** *de números complejos se define por*

$$(a + bi)) + (c + di) = (a + b) + (b + d)i$$

La ***multiplicación*** *se define por*

$$(a + bi))(c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

La ***división*** *de números complejos se define por*

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i$$

Siempre que $c + di \neq 0$*.*

El ***conjugado*** *de* $z = a + bi$ *es el número complejo* $\bar{z} = a - bi$*, siempre que a y b sean números reales.*

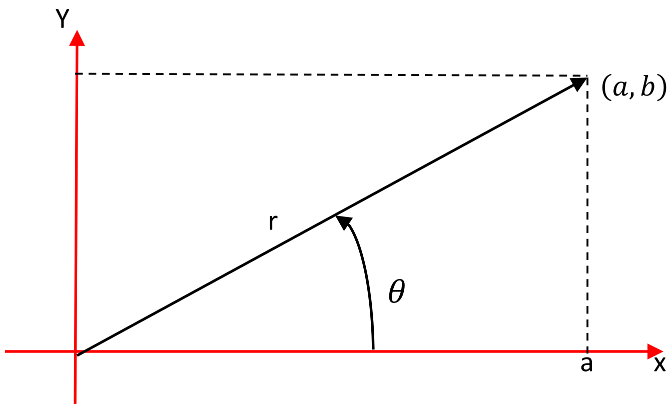
Es fácil verificar que, para todo número complejo $z = a + bi$*, se tiene*

$$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}\,, \quad Im(z) = -\frac{z-\bar{z}}{2}i\,, \quad z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Los números complejos se representan geométricamente considerando al eje x como ***eje real*** *y al eje y como* ***eje imaginario****, para entonces identificar cualquier número complejo* $z = a + bi$ *con el punto* (a, b) *de* $\mathbb{R}^2$*. Por tal motivo, en coordenadas polares r y θ se tiene*

$$z = a + bi = rcos\theta + (rsen\theta)i = r(cos\theta + isen\theta)$$

llamada ***forma polar*** *del número complejo. El número real* $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ *se llama* ***valor absoluto*** *o* ***módulo*** *de z (y se denota |z|) y θ se llama* ***argumento*** *de z (se denota* $\arg(z)$*).*



De forma abreviada

$$cis\theta = cos\theta + isen\theta$$

Y entonces la forma polar de

$$z = r(cos\theta + isen\theta) = rCis\,\theta$$

Se demuestra por el método de inducción completa, que

$$(rCis\,\theta)^n = r^n Cis\,n\theta \qquad Fórmula\ de\ Moivre$$

De lo que se deduce que

$$u_k = r^{1/n} Cis\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2, \ldots, n-1,$$

Son todas las soluciones de la ecuación $u^n = rCis\,\theta$, *es decir*

$$\sqrt[n]{rCis\,\theta} = r^{1/n}Cis\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2,\dots,n-1$$

Si $w = x + yi$, *con x e y números reales, se define*

$$e^w = e^x(cosy + iseny) = e^x Cis\,y$$

y entonces un número complejo $z = rCis\,\theta$ *se puede expresra como*

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Llamada ***forma exponencial*** *de z* ♦

4.6.1.3 Valores propios complejos

Si A es una matriz $n \times n$ *con coeficientes reales y* μ *es un autovalor complejo de A, entonces* μ *y* $\bar{\mu}$ *son dos raíces distintas del polinomio característico* $det(A - \lambda I)$.

Teorema 4.2.1.3.1

Si A es una matriz $n \times n$ *con coeficientes reales y* μ *es un autovalor complejo de A y* $\vec{K}$ *un autovector asociado a* μ $\left(\vec{K} \in \mathbb{C}^n\right)$. *Entonces,*

$$\vec{x}_1 = Re\left(e^{\mu t}\vec{K}\right) \qquad y \qquad \vec{x}_2 = Im\left(e^{\mu t}\vec{K}\right)$$

Son soluciones linealmente independientes del sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

♦

Ejemplo 4.6.1.3.1

Resolver

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \\ \dfrac{dz}{dt} = y + 2z \end{cases}$$

▲ *El polinomio característico de A esta dado por*

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$$

$$= -\lambda((\lambda - 2)^2 + 1) = -\lambda(\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i)$$

Así, los auto valores son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2 + i$ *y* $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = 2 - i$.

Ahora hallamos los auto vectores.

Para $\lambda_1 = 0$. *Tenemos que*

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando Gauss-Jordan, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces

$$\begin{cases} a = 2c \\ b = -2c \end{cases} \Longrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ -2c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} c$$

Luego el auto vector asociado a $\lambda_1 = 0$ *es* $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y en consecuencia, tenemos una solución dada, por*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, para el auto valor $\lambda_2 = 2 + i$, *obtenemos*

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1-i & 0 & -2 \\ 1 & -1-i & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando Gauss-Jordan, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-i & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1-i & 0 & 0 \\ -1-i & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1-i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces

$$\begin{cases} a = (1+i)b \\ b = ic \end{cases} \Longrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1+i)c \\ ic \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} c$$

Luego el auto vector asociado a $\lambda_2 = 2 + i$ *es* $\begin{pmatrix} -1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, *con lo cual, tenemos dos soluciones*

$$\vec{x}_2 = Re\big(Z(t)\big) \quad y \;\; \vec{x}_3 = Im\big(Z(t)\big)$$

Donde

$$Z(t) = \begin{pmatrix} -1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} -1+i \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}(cost + isent) =$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} -cost - sent + icost - isent \\ -sent + icost \\ cost + isent \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} -cost - sent \\ -sent \\ cost \end{pmatrix} + ie^{2t}\begin{pmatrix} cost - sent \\ cost \\ sent \end{pmatrix}$$

Así,

$$\vec{x}_2 = e^{2t}\begin{pmatrix} -cost - sent \\ -sent \\ cost \end{pmatrix} \quad y \;\; \vec{x}_3 = e^{2t}\begin{pmatrix} cost - sent \\ cost \\ sent \end{pmatrix}$$

Luego la solución general del sistema está dada por

$$\vec{x}(t) = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} -cost - sent \\ -sent \\ cost \end{pmatrix} + C_3e^{2t}\begin{pmatrix} cost - sent \\ cost \\ sent \end{pmatrix}$$

■

Ejemplo 4.6.1.3.2

Resolver

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = w \\ \dfrac{dw}{dt} = -x - 2z \end{cases}$$

▲ *Observe que*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

por lo que, desarrollando el determinante por cofactores de la primera columna, se tiene

$$det(A - \lambda I) = -\lambda det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = \big((\lambda + i)(\lambda - i)\big)^2$$

Entonces los auto valores son $\lambda_1 = i$ *y* $\lambda_2 = -i$, *ambos de multiplicidad 2. Para hallar los correspondientes autovectores se debe resolver el sistema*

$$(A - \lambda I)\vec{k} = \vec{0}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Usando el método de Gauss-Jordan se tiene

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4 \to f_4 + i f_1} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & i & -2 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4 \to f_4 + f_2} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4 \to f_4 + i f_3} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto se obtiene

$$\begin{cases} ia = -b \\ ib = -ic \\ ic = d \\ d = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = id \\ b = -d \\ c = -id \\ d = d \end{cases} \Rightarrow \vec{k} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} d$$

Entonces,

$$\vec{Z}_1(t) = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} (cost + isent)$$

Como $\lambda_1 = i$ *es de multiplicidad 2, debemos encontrar otra solución de la forma*

$$\vec{Z} = e^{it}\big(\vec{P} + t\vec{K}\big)$$

donde $\vec{k}$ *y* $\vec{P}$ *satisfacen*

$$(A-iI)\vec{K}=\vec{0} \quad y \quad (A-iI)\vec{P}=\vec{K}$$

Reemplazando $\vec{k}=\begin{pmatrix}-i\\-1\\-i\\1\end{pmatrix}$ *en la segunda ecuación nos conduce al sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} -ia\ +b & =i\\ \quad -ib+c & =-1\\ \qquad ic+d & =-i\\ \quad -2c-id & =\ 1\end{cases}$$

Cuya solución general es (hágalo como ejercicio)

$$\vec{P}=\begin{pmatrix}-3+id\\-2i-d\\1-id\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2i\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}i\\-1\\-i\\1\end{pmatrix}d$$

Tomemos $d=0$ *resultando* $\vec{P}=\begin{pmatrix}-3\\-2i\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\vec{Z}_2=e^{it}\left(\begin{pmatrix}-3\\-2i\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-i\\-1\\-i\\1\end{pmatrix}\right)=(cost+isent)\begin{pmatrix}-3+it\\-2i-t\\1-it\\t\end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$\vec{x}_1=Re(\vec{Z}_1), \qquad \vec{x}_2=Im(\vec{Z}_1),\ \ \vec{x}_3=Re(\vec{Z}_2), \qquad \vec{x}_4=Im(\vec{Z}_2),$$

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}-sent\\-cost\\sent\\cost\end{pmatrix};\ \vec{x}_2=\begin{pmatrix}cost\\-sent\\-cost\\sent\end{pmatrix};\ \vec{x}_3=\begin{pmatrix}-3cost-tsent\\-tcost+2sent\\cost+tsent\\tcost\end{pmatrix};\ \vec{x}_4=\begin{pmatrix}-3sent-tcost\\-2cost-tsent\\-tcost+sent\\tsent\end{pmatrix}$$

■

Capítulo 5

5. Sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneos

5.1 Solución general de un sistema no homogéneo

Consideremos el sistema SEDL no homogéneo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{G},$$

donde $A(t)$ *es continua, y sea* $\vec{x}_p$ *una solución particular cualquiera. Entonces* $\vec{x}_h$ *es una solución del SEDL homogéneo*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

si y sólo si, $\vec{y} = \vec{x}_h + \vec{x}_p$ *es una solución del SEDL no homogéneo*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{G}$$

♦

Si $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ *es un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

en el intervalo I, entonces su solución general en el intervalo I es la combinación lineal

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = c_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n} \\ c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n} \\ \vdots \\ c_1x_{n1} + c_2x_{n2} + \cdots + c_nx_{nn} \end{pmatrix}$$

Esta última matriz se reconoce como el producto de una matriz $n \times n$ con una matriz $n \times 1$. En otras palabras, la solución general del sistema homogéneo se puede escribir como el producto

$$\vec{x}(t) = \vec{\phi}(t)\vec{C}$$

donde $\vec{C}$ es un vector columna de $n \times 1$ constantes arbitrarias $c_1, c_2, \dots, c_n$ y la matriz $n \times n$, cuyas columnas consisten en los elementos de los vectores solución del sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

$$\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

*Se llama **matriz fundamental** del sistema en el intervalo I.*

♦

5.1 Método de Variación de parámetros

Hemos visto que podemos expresar la solución general del sistema homogéneo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

Como $\vec{x} = \vec{\phi}\vec{C}$, y cada vector $\vec{C} \in \mathbb{R}$ induce una solución de dicho sistema.

Supongamos que la matriz columna $\vec{C}$, que en principio es constante, depende de t, es decir, que $\vec{x}_p(t) = \vec{\phi}(t)\vec{C}(t)$ sea solución particular del sistema no homogéneo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{G}$$

es decir,

$$\frac{d\vec{x}_p}{dt} = \frac{d\left(\vec{\phi}(t)\vec{C}(t)\right)}{dt} = A\left(\vec{\phi}(t)\vec{C}(t)\right) + \vec{G}(t).$$

Entonces, como

$$\frac{d\left(\vec{\phi}(t)\vec{C}(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{\phi}(t)}{dt}\vec{C}(t) + \vec{\phi}(t)\frac{d\vec{C}(t)}{dt}$$

Obtenemos que

$$\frac{d\vec{\phi}(t)}{dt}\vec{C}(t) + \vec{\phi}(t)\frac{d\vec{C}(t)}{dt} = A\left(\vec{\phi}(t)\vec{C}(t)\right) + \vec{G}(t)$$

Ahora bien,

$$\frac{d\vec{\phi}(t)}{dt} = A(t)\vec{\phi}(t),$$

Tenemos que

$$A(t)\vec{\phi}(t)\vec{C}(t) + \vec{\phi}(t)\frac{d\vec{C}(t)}{dt} = A(t)\vec{\phi}(t)\vec{C}(t) + \vec{G}(t)$$

Luego,

$$\vec{\phi}(t)\frac{d\vec{C}(t)}{dt} = \vec{G}(t)$$

Ahora bien, observemos que las columnas de la matriz $\vec{\phi}(t)$ *son vectores linealmente independientes, por lo tanto,* $\vec{\phi}(t)$ *es una matriz invertible, entonces*

$$\frac{d\vec{C}(t)}{dt} = \left(\vec{\phi}(t)\right)^{-1}\vec{G}(t)$$

Integrando tenemos,

$$\vec{C}(t) = \int \left(\vec{\phi}(t)\right)^{-1}\vec{G}(t)dt$$

Sustituyendo, obtenemos que la solución particular

$$\vec{x}_p(t) = \vec{\phi}(t) \int \left(\vec{\phi}(t)\right)^{-1} \vec{G}(t)dt$$

♦

Ejemplo 5.1.1

Resuelva el sistema con condiciones iniciales

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{71}{100} \\ \frac{27}{25} \end{pmatrix}$$

en $(-\infty, \infty)$

▲ *Primero hallemos la solución homogénea, es decir, se resuelve el sistema homogéneo asociado*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \vec{x}$$

La ecuación característica asociado es

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0$$

Así que los valores propios son $\lambda_1 = -2$ *y* $\lambda_2 = -5$.

Para $\lambda_1 = -2$, *sea* $\vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b \Rightarrow \vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a$$

Luego, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = -5$, *sea* $\vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a = -b \Rightarrow \vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} a$$

Luego, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix}$

Ahora bien, la matriz fundamental del sistema viene dada por

$$\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Recordemos que la matriz inversa de una matriz de 2×2 *es fácil de calcular mediante la fórmula*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \left(\frac{1}{ad - bc}\right) adj \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Así, tenemos que

$$\left(\vec{\phi}(t)\right)^{-1} = \left(\frac{1}{-3e^{-7t}}\right)\begin{pmatrix} -2e^{-5t} & -e^{-5t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene

$$\vec{x}_p(t) = \vec{\phi}(t) \int \left(\vec{\phi}(t)\right)^{-1} \vec{G}(t)dt = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ e^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, la solución general en el intervalo es

$$\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-5t} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}t - \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}e^{-t}$$

Ahora bien, usando la condición inicial, tenemos que

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{71}{100} \\ -\frac{23}{25} \end{pmatrix} \Rightarrow c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{71}{100} \\ -\frac{23}{25} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - 2c_2 = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto la solución al problema de valores iniciales es

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-5t} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}t - \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}e^{-t}$$

■

Ejemplo 5.1.2

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sec t \\ 0 \end{pmatrix}$$

▲ *Calculemos la solución homogénea asociada al sistema*

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i \;\; y \;\; \lambda_2 = -i$$

Para $\lambda_1 = i$, *sea* $\vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reduciendo la matriz $A - iI$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, $a - ib = 0 \Rightarrow a = ib$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ib \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} b$$

Luego un auto vector asociado a $\lambda_1 = i$ *es* $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$*, lo cual genera dos soluciones*

$$\vec{x}_1 = Re\big(Z(t)\big) \qquad y \qquad \vec{x}_2 = Im\big(Z(t)\big)$$

donde

$$Z(t) = e^{it}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = (cost + isent)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} icost - sent \\ cost + isent \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sent \\ cost \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} cost \\ sent \end{pmatrix}$$

Así,

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -sent \\ cost \end{pmatrix} \qquad y \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} cost \\ sent \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución homogénea está dada por

$$\vec{x}_h = c_1\begin{pmatrix} -sent \\ cost \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} cost \\ sent \end{pmatrix}$$

Hallemos la solución particular del sistema

La matriz fundamental asociada al sistema y su inversa vienen dada por

$$\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} -sent & cost \\ cost & sent \end{pmatrix} \quad y \ \left(\vec{\phi}(t)\right)^{-1} = \frac{1}{det\vec{\phi}} adj\vec{\phi} = (-1)\begin{pmatrix} sent & -cost \\ -cost & -sent \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\vec{x}_p(t) = \vec{\phi}(t)\int \left(\vec{\phi}(t)\right)^{-1}\vec{G}(t)dt = \begin{pmatrix} -sent & cost \\ cost & sent \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -sent & cost \\ cost & sent \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sec t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} -sent & cost \\ cost & sent \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -tant \\ -1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -sent & cost \\ cost & sent \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ln|cost| \\ -t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sen\,t\; ln|cost - tcos\,t| \\ -\cos t\;\; ln|cost - tsen\,t| \end{pmatrix}$$

Finalmente la solución general del sistema no-homogéneo está dada por

$$\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p = c_1 \begin{pmatrix} -sent \\ cost \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} cost \\ sent \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sen\,t\; ln|cost - tcos\,t| \\ -\cos t\;\; ln|cost - tsen\,t| \end{pmatrix}$$

■

Capítulo 6

6. Ecuaciones diferenciales de orden n ($n > 1$) a coeficientes constante

Una ecuación de la forma

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *y* f *son funciones definidas en un intervalo I. Se conoce como* ***ecuación diferencial lineal de orden n.***

Supondremos que $a_n(t) = 1, para\ todo\ t \in I$*, con lo cual obtenemos una ecuación de la forma*

$$y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

A una ecuación de este tipo es posible asociarle un operador diferencial de la forma siguiente: denotemos por D a la derivada usual de funciones

$$D = \frac{d}{dt}$$

y hacemos

$$L_n = D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + a_1(t)D^1 + a_0(t)D^0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

donde $D^0 = I$ *la transformación identidad.*

Es claro que D^k *sólo puede ser aplicado a las funciones que tienen al menos k derivadas, luego* D^k *está definido en el espacio vectorial de las funciones a valores reales con k derivadas, denotado por* $U(k)$*.* L_n *está definido en el espacio* $U(n)$*. Como la derivada es lineal, tenemos que* L_n*también es lineal, es decir, si* a, b *son escalares (reale o complejos) y* $f, g \in U(n)$*, entonces*

$$L_n(af + bg) = aL_n(f) + bL_n(g)$$

Observemos que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial $L_n(y) = 0$, *forma un subespacio vectorial de* $U(n)$, *ya que dicho conjunto es el espacio anulador o núcleo de* L_n. *Denotemos por* V_{L_n} *dicho espacio.*

Con esta notación, la ecuación diferencial se escribe como

$$D^n\big(y(t)\big) + a_{n-1}(t)D^{n-1}\big(y(t)\big) + \cdots + a_1(t)D\big(y(t)\big) + a_0(t)\big(y(t)\big) = g(t)$$

O simplemente

$$L_n\big(y(t)\big) = f(t), para\ todo\ t \in I$$

Si $f(t) = 0$, *entonces la EDO es una ecuación lineal* ***homogénea****, de no ser así, es* ***no homogénea***

La solución general de EDO lineal es de la forma

$$y_G = y_h + y_p$$

donde la función y_h *es la solución de la ecuación lineal homogénea asociada y* y_p *es la solución particular.*

Observemos, por otra parte, que siempre es posible expresar una EDO lineal de orden n mediante un sistema de n ecuaciones lineales de orden 1 con n incógnitas. Más precisamente, dada la ecuación (1) podemos hacer

$$x_1 = y, \qquad x_2 = y', \dots, x_{n-1} = y^{(n-2)}, x_n = y^{(n-1)}$$

y

$$x_n' = y^n = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_1 y' - a_0 y + g$$

Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ & \vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + g \end{cases}$$

Expresando este sistema en notación matricial, obtenemos

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{G}$$

Donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

♦

Ejemplo 6.1

Escribir la ecuación

$$y''' + 5y'' - \frac{3}{2}y' + y = 0$$

Como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, y encuentre el polinomio característico de la matriz A asociado al sistema.

▲ *Para encontrar el sistema, hacemos* $x_1 = y,\ x_2 = y', x_3 = y''$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 5x_3 \end{cases}$$

En forma matricial, tenemos un sistema homogéneo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3/2 & -5 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A está dado por

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & -3/2 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + 1$$

Observemos que el operador diferencial de la ecuación está dado por

$$L = D^3 + 5D^2 - \frac{3}{2}D + 1$$

■

Teorema 6.1

Sea $L_n(y) = 0$ una EDO lineal homogénea, donde

$$L_n = D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + a_1(t)D^1 + a_0(t)D^0$$

Con $a_j, 0 \leq j \leq n-1$ y g funciones continuas sobre un intervalo I. Si $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de n soluciones de $L_n(y) = 0$, existen constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ tales que

$$y_h = c_1 y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n y_n$$

♦

Definición 5.1

Un conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ de n soluciones linealmente independiente de $L_n(y) = 0$ es llamado un conjunto fundamental de soluciones.

♦

Definición 5.2

Sea $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ *un conjunto de soluciones de* $L_n(y) = 0$. *El* ***Wronskiano*** *de las n soluciones* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *está dado por*

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

♦

Teorema 6.2

Sean $y_1, y_2, \dots, y_n$ *soluciones de* $L_n(y) = 0$, *donde*

$$L_n = D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + a_1(t)D^1 + a_0(t)D^0$$

con $a_j, 0 \leq j \leq n-1$ *y g funciones continuas sobre un intervalo I.*

Entonces, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ *es linealmente independiente si y sólo si* $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(t_0) \neq 0$ *para algún* $t_0 \in I$.

♦

Ejemplo 6.2

Verifique que

$$y_1(x) = e^{2x}, \;\; y_2(x) = xe^{2x}, \;\; y_3(x) = e^{3x}$$

Son soluciones LI de la ecuación diferencial

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$$

▲ *Se deja al lector verificar que* y_1, y_2, y_3 *son soluciones . Para ver que son LI se aplica el teorema 6.2. Observe que los coeficientes de la ecuación son constantes y por lo tanto continuas para todo x en* $\mathbb{R}$. *Por ello basta verificar, por ejemplo, que*

$$W(y_1, y_2, y_3)(0) \neq 0$$

Ahora bien,

$$W(y_1, y_2, y_3)(0) = det\begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x} & 3e^{3x} \\ 4e^{2x} & (4+4x)e^{2x} & 9e^{3x} \end{pmatrix}_{x=0} = det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

■

6.1 Solución de la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

Sea

$$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D^1 + a_0D^0$$

con a_j, $0 \leq j \leq n-1$ *constantes reales, y supongamos que*

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

es una solución de la EDO homogénea $L_n(y) = 0$,*tenemos que*

$$L_n\left(e^{\lambda t}\right) = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D^1 + a_0D^0)\left(e^{\lambda t}\right)$$

$$= \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \cdots + a_1\lambda e^{\lambda t} + a_0e^{\lambda t}$$

$$= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t}$$

El polinomio $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ *es llamado* ***polinomio característico asociado*** *al operador* L_n

♦

6.1.1 Ecuaciones de orden dos

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de 2do orden con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0$$

El polinomio característico asociado a la EDO es de la forma

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Ahora bien las dos raíces de este polinomio son

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La naturaleza de λ_1 *y* λ_2 *depende del signo del discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac$

Entonces debemos considerar los casos siguientes:

Caso I

Si $\Delta > 0$, *las raíces* λ_1 *y* λ_2 *son reales y distintas, la solución general de la ecuación homogénea es*

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

donde c_1 *y* c_2 *son constantes.*

Caso II

Si $\Delta = 0$, *las raíces* λ_1 *y* λ_2 *son iguales, la solución general de la ecuación homogénea es*

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

Caso III

Si $\Delta < 0$, *las raíces* λ_1 *y* λ_2 *son complejas, es decir,* $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ *y* $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

y la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sen\beta x)$$

♦

Ejemplo 6.1.1.1

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\sqrt{5}\frac{dy}{dx} + 5y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$$

▲ *La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es:*

$$\lambda^2 - 2\sqrt{5}\lambda + 5 = 0$$

Cuyas raíces son $\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{5}$, *luego*

$$y = c_1 e^{\sqrt{5}x} + c_2 x e^{\sqrt{5}x}$$

Para obtener el valor de las constantes, usamos las condiciones iniciales dadas

Tenemos:

$$y = c_1 e^{\sqrt{5}\,0} + c_2 0 e^{\sqrt{5}0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

Luego

$$y = c_2 x e^{\sqrt{5}x} \Rightarrow y' = c_2 e^{\sqrt{5}x} + c_2 x\sqrt{5}e^{\sqrt{5}x}$$

como $y'(0) = 3$, *tenemos que* $c_2 = 3$

Por lo tanto la solución general es

$$y = 3xe^{\sqrt{5}x}$$

■

Ejemplo 6.1.1.2

Resolver la ecuación diferencial $6y'' - y' - y = 0$

▲*La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es*

$$6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Cuyas raíces son

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \ y \ \lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

luego

La solución general es:

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-\frac{1}{3}x}$$

■

Ejemplo 6.1.1.3

Resolver la ecuación $y'' + 2y = 0$

▲*La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es*

$$\lambda^2 + 2 = 0$$

cuyas raíces son complejas, es decir,

$$\lambda_1 = i\sqrt{2} \quad y \quad \lambda_2 = -i\sqrt{2}$$

luego la solución es:

$$y = c_1 cos\sqrt{2}x + c_2 sen\sqrt{2}x$$

■

6.1.2 Ecuaciones de orden superior

En general, para resolver una ecuación diferencial de orden n

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

con a_j, $0 \leq j \leq n-1$ *constantes reales*

Debemos resolver una ecuación característica de grado n

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda' + a_0 = 0$$

Si todas las raíces de del polinomio auxiliar son reales y distintas, entonces la solución general de de la EDO es

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Es algo más difícil resumir los análogos del caso II y del caso III porque las raíces de una ecuación auxiliar de grado mayor que dos pueden aparecer en muchas combinaciones. Por ejemplo, una ecuación de quinto grado podría tener cinco raíces reales distintas, tres raíces reales distintas y dos complejas, una raíz real y cuatro complejas, cinco raíces reales iguales, cinco reales pero sólo dos de ellas iguales, etcétera. Cuando λ_1 *es una raíz de multiplicidad k de una ecuación de grado n (es decir, k raíces son iguales a* λ_1*) entonces puede demostrarse que las soluciones linealmente independientes son*

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$$

y que la solución general debe contener la combinación lineal

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} + c_3\, x^2 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_k x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$$

Por último, las raíces complejas de una ecuación auxiliar siempre aparecerán en pares conjugados. Por ejemplo, una ecuación polinomial cúbica puede tener a lo más dos raíces complejas.

Cuando , $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ *es la raíz compleja de orden de multiplicidad k de una ecuación auxiliar, su conjugada ,* $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ *es también raíz de orden de multiplicidad k. En este caso, la solución* *general de la ecuación diferencial debe contener una combinación lineal de las soluciones linealmente independientes:*

$$e^{\alpha x}cos\beta x, xe^{\alpha x}cos\beta x, x^2e^{\alpha x}cos\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}sen\beta x, xe^{\alpha x}sen\beta x, x^2e^{\alpha x}sen\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}sen\beta x$$

♦

Ejemplo 6.1.2.1

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y''' + 3y'' + y' + y = 0$
2. $y^{iv} + 2y'' + y = 0$

▲

1. *La ecuación auxiliar es*

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$*, luego la solución es*

$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}$$

2. *La ecuación auxiliar es*

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Puesto que las raíces $\lambda_1 = i$ $\lambda_2 = -i$ *son dobles, la solución general es*

$$y = c_1cosx + c_2senx + c_3xcosx + c_4xsenx$$

■

6.2 Método de los coeficientes indeterminados

La primera de las dos formas que se consideran para obtener una solución particular y_p de una EDO lineal no homogénea se llama ***método de los coeficientes*** *indeterminados. La idea fundamental que sustenta este método es una conjetura acerca de la forma de y_p , dependiendo de la clase de funciones que constituyen la función de entrada $f(x)$. El método se limita a EDO lineales como:*

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

donde

- ✓ *Los coeficientes* $a_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ *son constantes*
- ✓ $f(x)$ *consiste en la suma o producto de*

$$x^n, e^{mx}, \cos\beta x\,, \operatorname{sen}\beta x$$

Por ejemplo:

a. *Si* $f(x) = x^2$, *escójase* $y_p = Ax^2 + Bx + c$
b. *Si* $f(x) = 4xe^x$ *escójase* $y_p = Axe^x + Be^x$
c. *Si* $f(x) = x + sen2x$ *escójase* $y_p = (Ax + B) + C\cos 2x + Dsen2x$

Entonces, por sustitución, determinamos los coeficientes de esta solución generalizada.

♦

Ejemplo 6.2.1

Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' - 3y = 2senx$$

▲ *Hallemos primero la solución homogénea, para ello resolveremos la ecuación auxiliar asociada a la ecuación diferencial*

$$m^2 - 2m - 3 = 0$$

cuyas raíces son $m_1 = -1$ *y* $m_2 = 3$. *Por lo que la solución homogénea es*

$$y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$$

Para hallar la solución particular, hacemos que y_p sea una forma generalizada de $f(x) = 2senx$. Esto es, hacemos

$$y_p = Acosx + Bsenx$$

Luego,

$$y_p' = -Asenx + Bcosx \Rightarrow y_p'' = -Acosx - Bsenx$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos

$$-Acosx - Bsenx + 2Asenx - 2Bcosx - 3Acosx - 3Bsenx = 2senx$$

Entonces,

$$(-4A - 2B)cosx + (-3B + 2A)senx = 2senx$$

igualando término a término obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -4A - 2B = 0 \\ -3B + 2A = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{5} \quad y \quad B = -\frac{2}{5}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y_G = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{5}cosx - \frac{2}{5}senx$$

■

Ejemplo 6.2.2

Resolver

$$y'' - 2y' = x + 2e^x$$

▲ *El polinomio característico asociado es $m^2 - 2m = 0$, cuyas raíces son $m_1 = 0$ y $m_2 = 2$, luego la solución homogénea es $y_h = c_1 + c_2e^{2x}$.*

Puesto que $f(x) = x + 2e^x$ nuestra primera elección de y_p sería $(A + Bx) + Ce^x$.

Sin embargo, como y_h ya contiene un término constante c_1, multiplicamos la polinómica por x y usamos

$$y_p = Ax + Bx^2 + Ce^x$$

Entonces,

$$y_p' = A + 2Bx + Ce^x \Rightarrow y_p'' = 2B + Ce^x$$

Sustituyendo e igualando término a término en la ecuación diferencial, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2B - 2A = 0 \\ -4B = 1 \\ -C = 2 \end{cases} \Rightarrow A = B = -\frac{1}{4} \;\; y \;\; C = -2$$

En consecuencia,

$$y_p = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - 2e^x$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y_G = y_h + y_p = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - 2e^x$$

■

Ejemplo 6.2.3

Determinar una forma apropiada de la solución particular y_p para las siguientes ecuaciones diferenciales donde la solución homogénea es dada.

1. $y'' = x^2, \qquad y_h = c_1 + c_2x$
2. $y'' + 2y' + 10y = 4sen3x, \qquad y_h = c_1e^{-x}cos3x + c_2e^{-x}sen3x$
3. $y'' - 4y' + 4 = e^{2x}, \qquad y_h = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$

▲

1. *Como $f(x) = x^2$, la elección de y_p sería $A + Bx + Cx^2$, pero $y_h = c_1 + c_2x$ entonces*

$$y_p = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4.$$

2. *Como* $f(x) = 4sen3x$ *y* y_h *contiene un factor de* e^{-x}*, hacemos*

$$y_h = Acos3x + Bsen3x$$

3. *Como* $f(x) = e^{2x}$*, la elección de* y_p *sería* Ae^{2x}*. Pero, como* $y_h = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$ *ya contiene un término* $\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}$*, multiplicamos por* x^2 *para concluir que*

$$y_p = Ax^2e^{2x}$$

■

6.3 Método de variación de parámetros

El método de los coeficientes indeterminados es aplicable si el término no homogéneo $f(x)$ *está formado por polinomios o funciones cuyas derivadas sucesivas siguen un modelo cíclico. Para funciones como* $\frac{1}{x}$ *y* $\tan x$*, que no poseen tales características, usamos un método más general llamado* ***variación de parámetros****.*

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

Supongamos que y_p *tiene la misma forma que* y_h *excepto que las constantes en* y_h *se sustituyen por variables, es decir,*

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

donde y_1 *y* y_2 *forman un conjunto fundamental de soluciones en I de la ecuación diferencial homogénea.*

Ahora bien,

$$y_p' = u_1y_1' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2'$$

$$y_p'' = u_1y_1'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' + u_1'y_1' + u_2y_2'' + u_2'y_2' + y_2u_2'' + u_2'y_2'$$

Al sustituir en la ecuación diferencial dada tenemos

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y =$$

$$= [u_1 y_1'' + y_1' u_1' + y_1 u_1'' + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + u_2' y_2' + y_2 u_2'' + u_2' y_2'] +$$

$$+p(x)[u_1 y_1' + y_1 u_1' + u_2 y_2' + y_2 u_2'] + Q(x)[u_1 y_1 + u_2 y_2] = f(x)$$

Agrupando términos, se obtiene

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = u_1 \overbrace{[y_1'' + Py_1' + Qy_1]}^{cero} + u_2 \overbrace{[y_2'' + Py_2' + Qy_2]}^{cero} + y_1 u_1'' + u_1' y_1'$$

$$+y_2 u_2'' + u_2' y_2' + P[y_1 u_1' + y_2 u_2'] + y_1' u_1' + u_2' y_2'$$

$$= \frac{d}{dx}[y_1 u_1'] + \frac{d}{dx}[y_2 u_2'] + P[y_1 u_1' + y_2 u_2'] + y_1' u_1' + u_2' y_2'$$

$$= \frac{d}{dx}[y_1 u_1' + y_2 u_2'] + P[y_1 u_1' + y_2 u_2'] + y_1' u_1' + u_2' y_2' = f(x)$$

Como se busca determinar dos funciones desconocidas u_1 y u_2, son necesarias dos ecuaciones. Estas ecuaciones se obtienen con la suposición de que las funciones u_1 y u_2 satisfacen

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$$

Entonces

$$y_1' u_1' + u_2' y_2' = f(x)$$

Por la regla de Cramer, la solución del sistema

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) \end{cases}$$

Puede expresarse en términos de determinantes:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W} \quad y \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W}$$

donde

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \qquad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

Ejemplo 6.3.1

Resolver

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2x}$$

▲ *La ecuación característica asociada es* $m^2 - 2m + 1 = 0$*, cuyas raíces son* $m_1 = m_2 = 1$*, luego*

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Ahora bien, para hallar la solución particular tenemos que

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = u_1 e^x + u_2 x e^x$$

donde u_1 *y* u_2 *satisfacen el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} u_1' e^x + u_2' x e^x = 0 \\ u_1' e^x + u_2'(x e^x + e^x) = \dfrac{e^x}{2x} \end{cases}$$

El Wronskiano viene dado por

$$W = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & x e^x + e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

Entonces

$$u_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W} = -\frac{x e^x \left(\frac{e^x}{2x}\right)}{e^{2x}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{2}\int dx = -\frac{x}{2}$$

$$u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W} = \frac{e^x \left(\frac{e^x}{2x}\right)}{e^{2x}} = \frac{1}{2x} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} ln|x| = ln\sqrt{x}$$

Por lo tanto

$$y_p = -\frac{x}{2}e^x + xe^x ln\sqrt{x}$$

y la solución general es

$$y_G = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 xe^x - \frac{x}{2}e^x + xe^x ln\sqrt{x}$$

■

6.4 Generalización del Método de variación de parámetros

El método de variación de parámetros se puede generalizar a ecuaciones lineales de orden n de la forma

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Si la solución homogénea es

$$y_h = c_1 y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n y_n$$

Entonces una solución particular es

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x)$$

Donde u_k' $k = 1, ,2, \ldots, n$ *se determinan mediante las n ecuaciones*

$$\begin{cases} y_1 u_1' + \quad y_2 u_2' + \cdots + y_n u_n' & = 0 \\ y_1' u_1' + \quad y_2' u_2' + \cdots + y_n' u_n' & = 0 \\ \qquad \vdots & \\ y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + \cdots + y_n^{(n-1)} u_n' & = f(x) \end{cases}$$

En este caso con la regla de Cramer el resultado es

$$u_k' = \frac{W_k}{W}, k = 1,2, \ldots, n$$

donde W *es el Wronskiano de* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *y* W_k *es el determinante que se obtiene al remplazar la k-ésima del wronskiano por la columna formada por el lado el lado derecho del sistema, es decir, la columna que consta de* $(0, 0, \dots, f(x))$

♦

Ejemplo 6.4.1

Resolver

$$y''' + y' = tanx$$

▲ *La solución homogénea viene dada por*

$$y_h = c_1 + c_2 cosx + c_3 senx$$

Ya que el polinomio característico asociado es $m^3 + m = m(m^2 + 1) = 0$

La solución particular es de la forma

$$y_h = u_1(x) + u_2(x)cosx + u_3(x)senx$$

Donde $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ *se obtienen del sistema*

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' + y_3 u_3' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' + y_3' u_3' = 0 \\ y_1'' u_1' + y_2'' u_2' + y_3'' u_3' = f(x) \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{cases} u_1' + cosx u_2' + senx u_3' = 0 \\ 0 - senx u_2' + cosx u_3' = 0 \\ 0 - cosx u_2' - senx u_3' = tanx \end{cases}$$

El Wronskiano es

$$W = \begin{vmatrix} 1 & cosx & senx \\ 0 & -senx & cosx \\ 0 & -cosx & -senx \end{vmatrix} = 1$$

Luego,

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \begin{vmatrix} 0 & cosx & senx \\ 0 & -senx & cosx \\ tanx & -cosx & -senx \end{vmatrix} = tanx(sen^2x + cos^2x) = tanx$$

$$\Rightarrow u_1 = -ln|cosx|$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \begin{vmatrix} 1 & senx & 0 \\ 0 & cosx & 0 \\ 0 & -senx & tanx \end{vmatrix} = senx$$

$$\Rightarrow u_2 = -cosx$$

$$u_3' = \frac{W_3}{W} = \begin{vmatrix} 1 & cosx & 0 \\ 0 & -senx & 0 \\ 0 & -cosx & tanx \end{vmatrix} = -\frac{sen^2x}{cosx} = cosx - secx$$

$$\Rightarrow u_2 = senx - ln|secx + tanx|$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y_G = y_h + y_p =$$

$$= c_1 + c_2cosx + c_3senx - ln|cosx| + senxcosx + sen^2x - senxln|secx + tanx|$$

■

6.5 Ecuación de Euler

Una ecuación de Euler es una ecuación diferencial de la forma

$$t^n y^n + b_{n-1} t^{n-1} y^{n-1} + \cdots + b_1 t y' + b_0 y = 0$$

Con $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1, \dots , n$

Observe que si $t \neq 0$*, la ecuación se escribe*

$$y^n + \frac{b_{n-1}}{t} y^{n-1} + \cdots + \frac{b_1}{t^{n-1}} y' + \frac{b_0}{t^n} y = 0$$

Cuyos coeficientes son continuos en $(0, \infty)$ *y en* $(-\infty, 0)$*. Por tanto siempre es posible hallar la solución general en uno de estos intervalos.*

Para resolverla se supondrá $t > 0$*, y entonces se puede hacer la sustitución*

$$t = e^u. \ so\ sea\ u = lnt,$$

(Si $t < 0$*, se hace* $t = -e^u$ *y se produce en forma análoga).*

Observe que como

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} = e^{-u}$$

Si se llama $s = s(u) = y(e^u)$*, resulta*

$$s'(u) = y'(e^u)e^u$$

$$s''(u) = y''(e^u)e^{2u} + y'(e^u)e^u = y''(e^u)e^{2u} + s'(u)$$

Por lo que

$$y''(t) = y''(e^u) = [s''(u) - s'(u)]e^{-2u}$$

$$y'(t) = y'(e^u) = s'(u)e^{-u}$$

El lector puede verificar en forma similar que

$$y'''(t) = [s'''(u) - 3s''(u) + 2s'(u)]e^{-3u}$$

En general

$$y^{(k)} = e^{-ku}\left(\sum_{i=1}^{k} r_{ik} s^{(i)}(u)\right), \qquad con\ r_{ik} \in \mathbb{R}$$

Reemplazando $y, y', \dots, y^{(n)}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} r_{in} s^{(i)}(u)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} r_{in-1} s^{(i-1)}(u)\right) b_{n-1} + \cdots + [s''(u) - s'(u)]b_2 + s'(u)b_1 + s(u)b_0 = 0$$

Que es una ecuación diferencial de orden n con coeficientes constantes, con incógnitas $s = s(u)$*, cuya solución ya fue estudiada anteriormente.*

♦

Ejemplo 6.5.1

Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

▲

Como $x > 0$, se hace la sustitución

$$t = e^u, \qquad o\ sea\ u = lnt\ ,$$

Por lo tanto,

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} = e^{-u}$$

Llamando $s = s(u) = y(e^u)$

Se tiene

$$y''(x) = \big(s''(u) - s'(u)\big)e^{-2u}$$

$$y'(x) = s'(u)e^{-u}$$

Reemplazando en la ecuación resulta

$$e^{2u}\big(s''(u) - s'(u)\big)e^{-2u} - e^{u}(s'(u)e^{-u}) + s = 0$$

O sea

$$s'' - 2s' + s = 0$$

Cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Por ello

$$s(u) = c_1e^{u} + c_2ue^{u}$$

Entonces

$$y(x) = c_1x + c_2xlnx$$

■